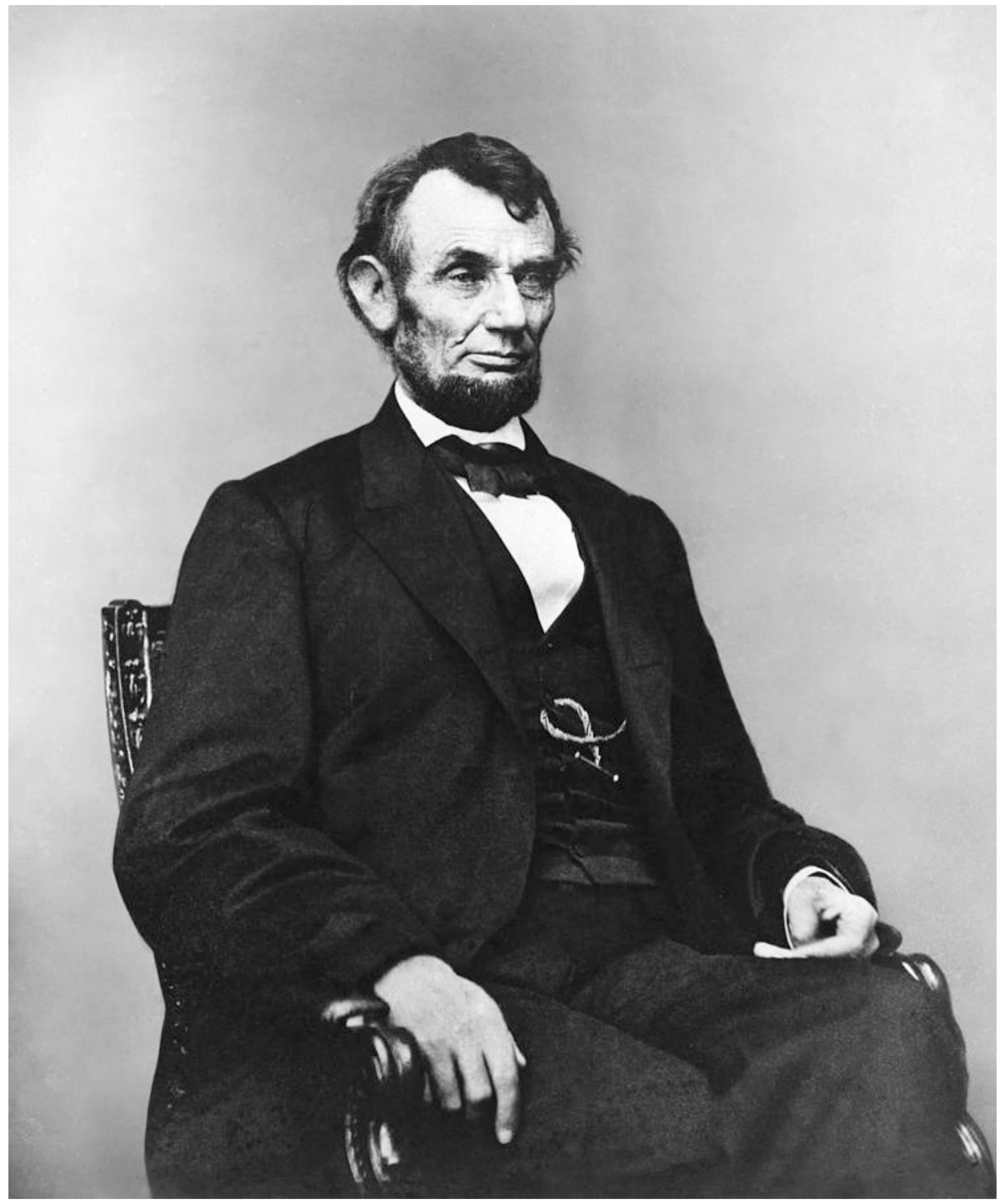
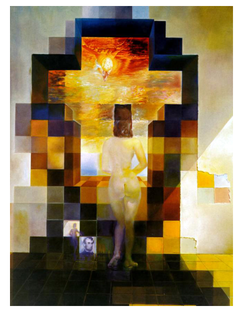
Filtrage dans le domaine spectral

GIF-4105/7105 Photographie Algorithmique
Jean-François Lalonde

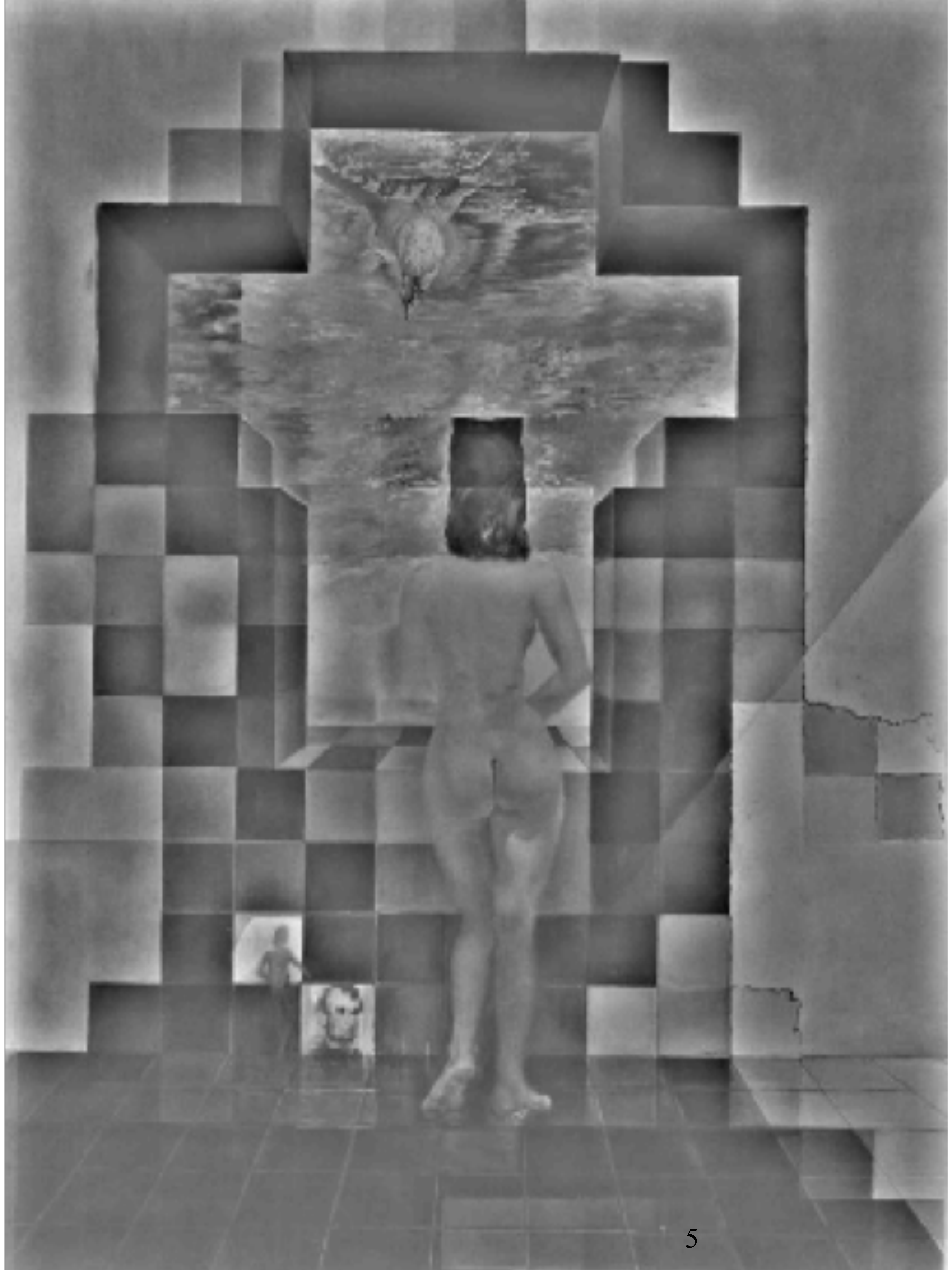
Image: Salvador Dali

Salvador Dali
« Gala contemplant la mer Méditerranée qui à vingt mètres devient le portrait d'Abraham Lincoln »,
1976



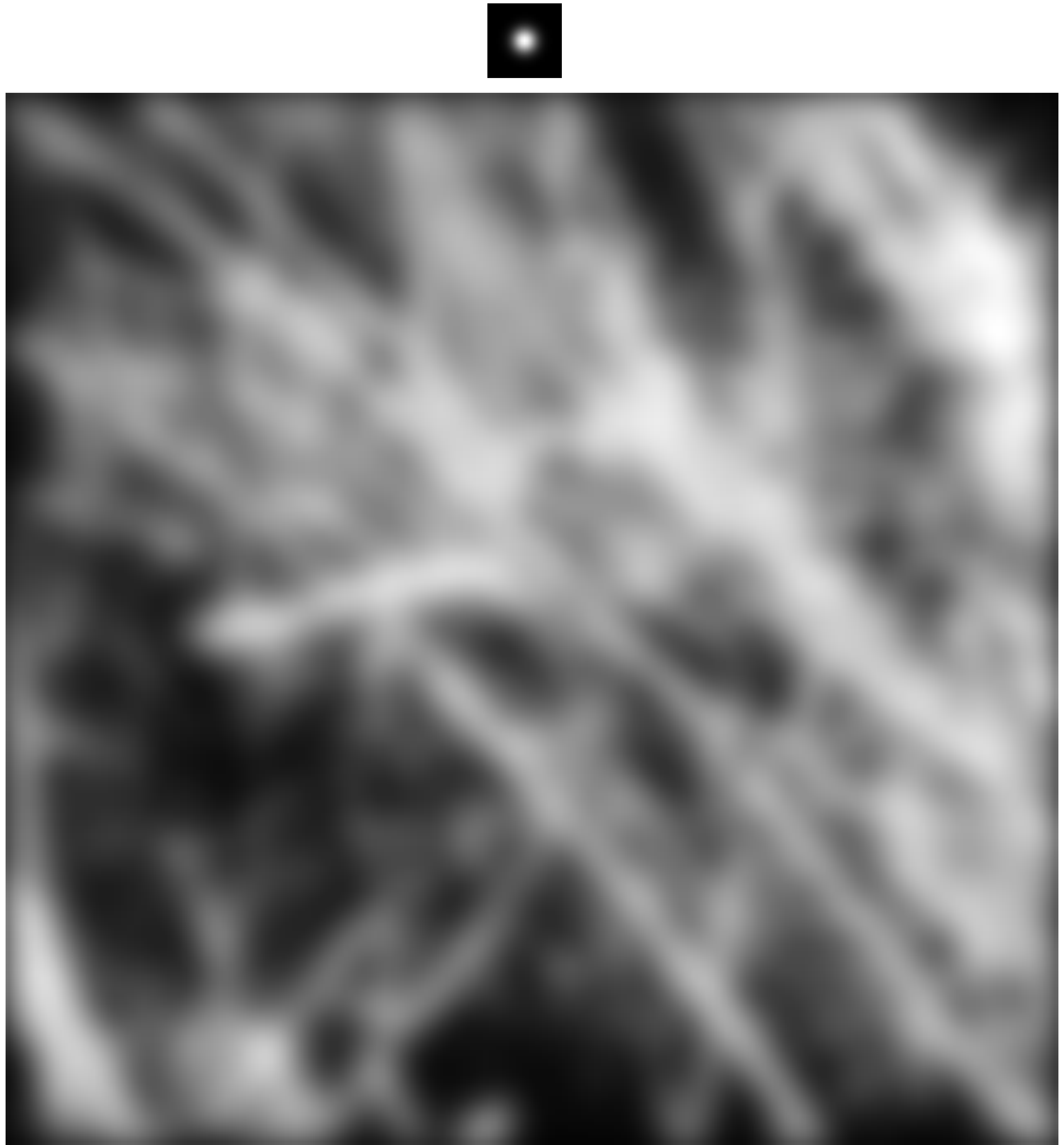


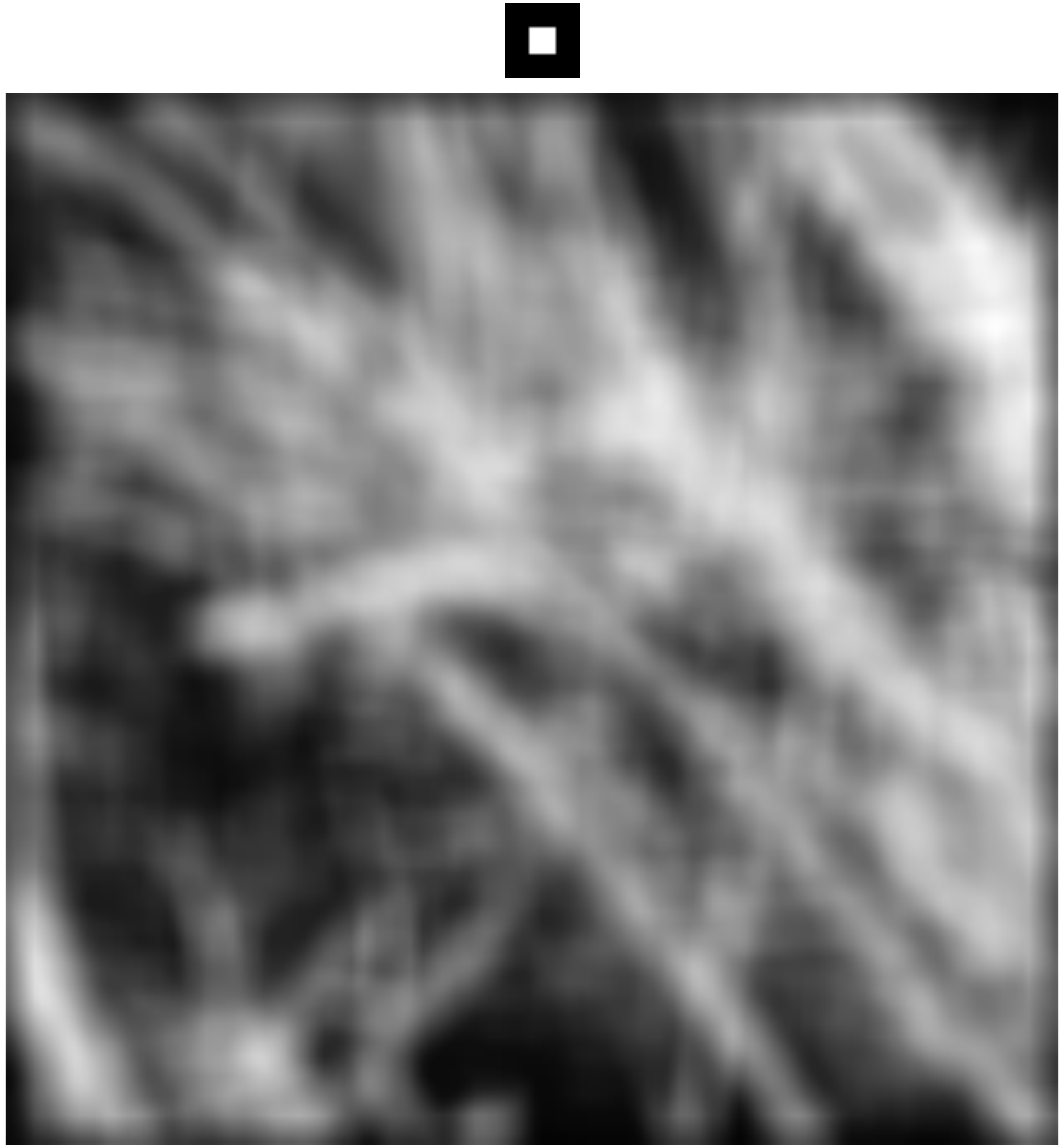
Salvador Dali
« Gala contemplant la mer Méditerranée qui à vingt mètres devient le portrait d'Abraham Lincoln »,
1976



Comment une image peut-elle contenir deux images?

Pourquoi le filtre gaussien nous donne une image lisse,
mais pas le filtre boîte?





Pourquoi peut-on toujours interpréter une image à plus faible résolution?
Quelle est l'information perdue?

Résolution originale

1/2 résolution
(4x moins de pixels!)

Image: http://www.flickr.com/photos/igorms/136916757/

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

- a eu une idée révolutionnaire (1807):
  - Toute fonction peut être écrite comme une somme pondérée de sinus de différentes fréquences
- Vous n'y croyez pas?
  - Lagrange, Laplace, Legendre et autres non plus!
  - Pas traduit en anglais jusqu'à 1878!

Source: Efros

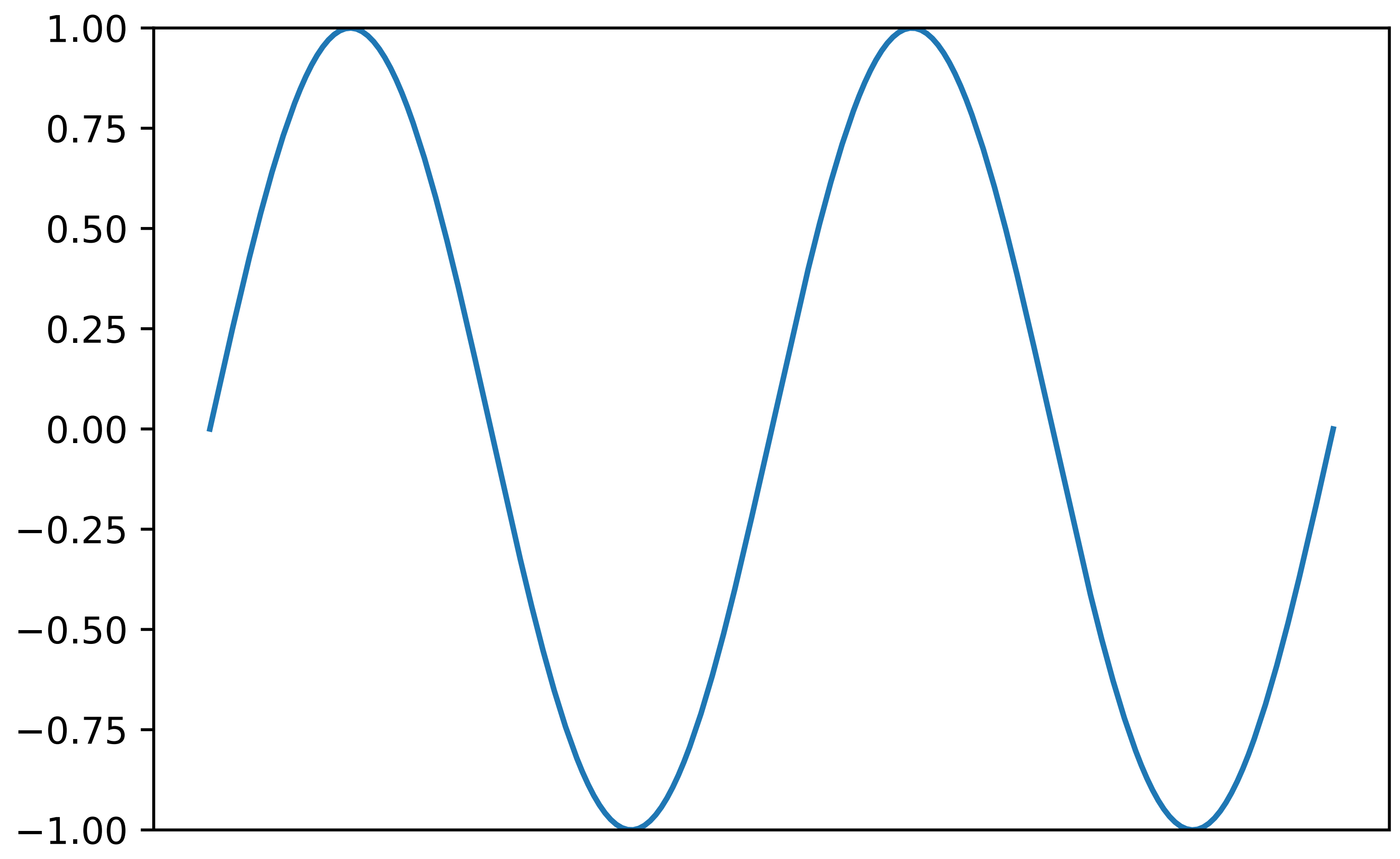
La transformée de Fourier

Toute fonction peut être écrite comme une somme pondérée de sinus de différentes fréquences (et phases)

Notre “unité” de base:

$$A \sin(\omega x + \phi)$$

amplitude fréquence phase



La transformée de Fourier

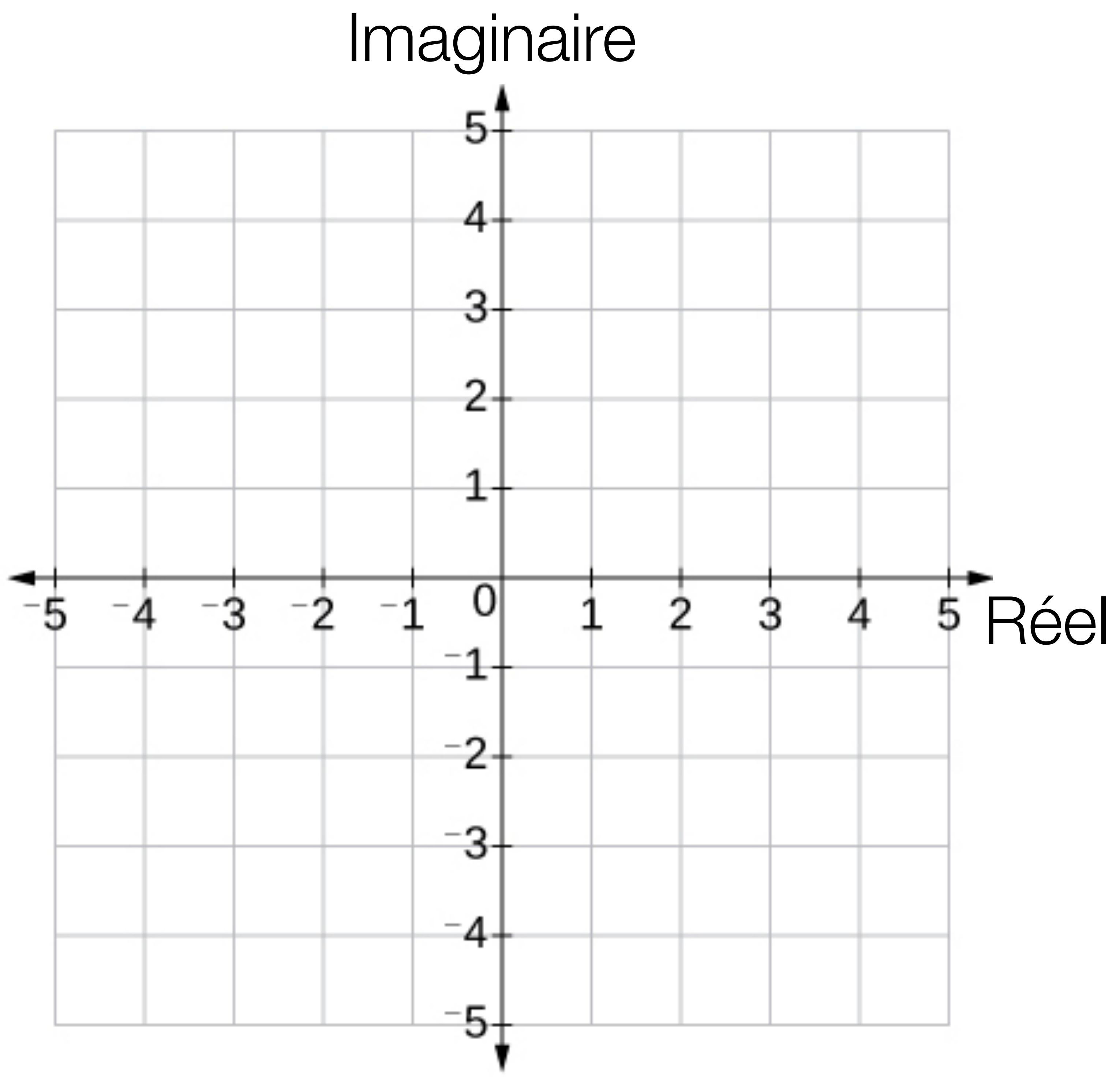
- Nous voulons comprendre les fréquences ω de notre signal.
  - Exprimons alors le signal avec ω au lieu de x:

f(x) → Transformée de Fourier → F(ω)

- F(ω) représente la **magnitude** et la **phase** à chaque fréquence
  - Magnitude : « quantité » de signal à chaque fréquence
  - Phase : translation horizontale

La transformée de Fourier

- F(ω) représente l'**amplitude** et la **phase** du signal
  - Comment faire pour représenter ces deux informations?
  - On utilise les nombres complexes $$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega)$$
    - Où l'amplitude est: $$A = \pm\sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2}$$
    - Et la phase: $$\Phi = \tan^{-1}\frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$



La transformée de Fourier

On définit une base complexe (formule d'Euler).

$$e^{-i\omega x} = \cos(\omega x) + i\sin(\omega x)$$

On multiplie le signal par la base complexe…

$$f(x)e^{-i\omega x}$$

… et on répète sur tout le domaine du signal.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

La transformée de Fourier du signal f(x) est sa **projection sur la base complexe**.

Calculer la transformée de Fourier

Continue

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-j\omega x} dx$$

Discrète

$$H(k) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} h(x) e^{-j\frac{2\pi k x}{N}}$$

k=-N/2..N/2

(pour s'en souvenir)

Pour la calculer, on utilise l'algorithme « Fast Fourier Transform (FFT) »
Complexité de la FFT : O(N log N)

Transformée de Fourier

- Directe

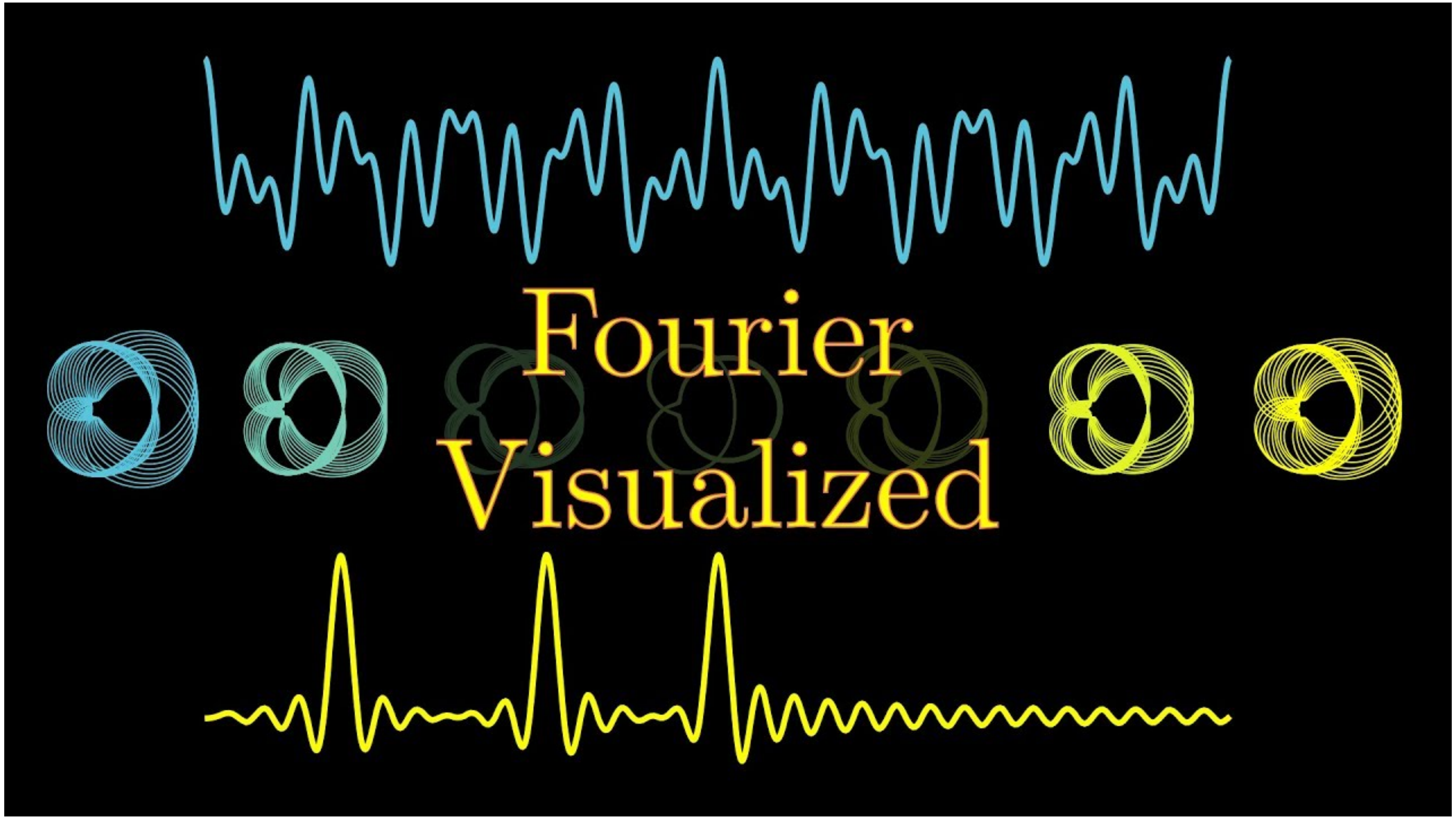
$f(x) \longrightarrow$ Transformée de Fourier $\longrightarrow F(\omega)$

- Inverse

$F(\omega) \longrightarrow$ Transformée de Fourier Inverse $\longrightarrow f(x)$

Autre explication super intuitive (3blue1brown)

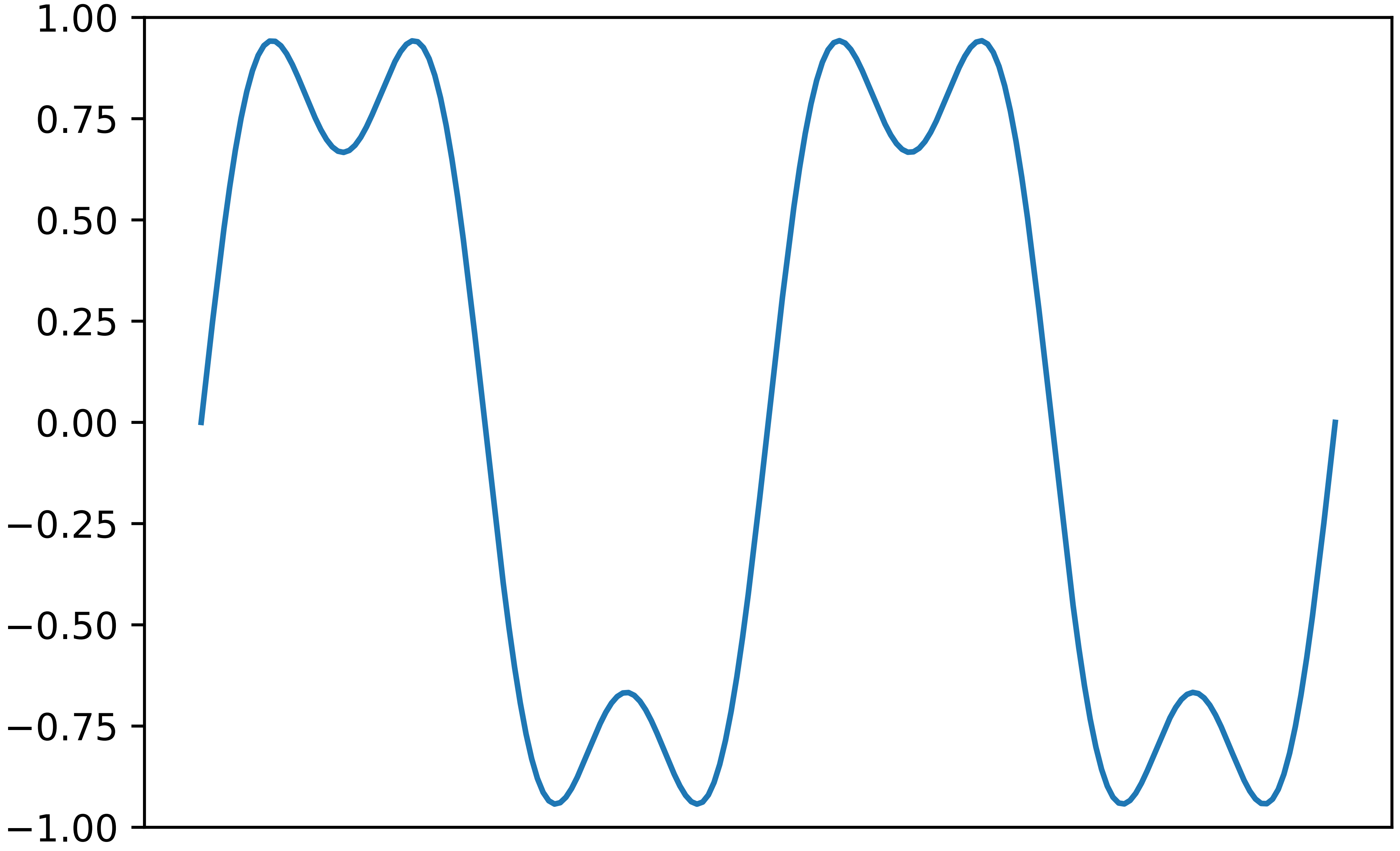
https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY



Spectre en fréquences

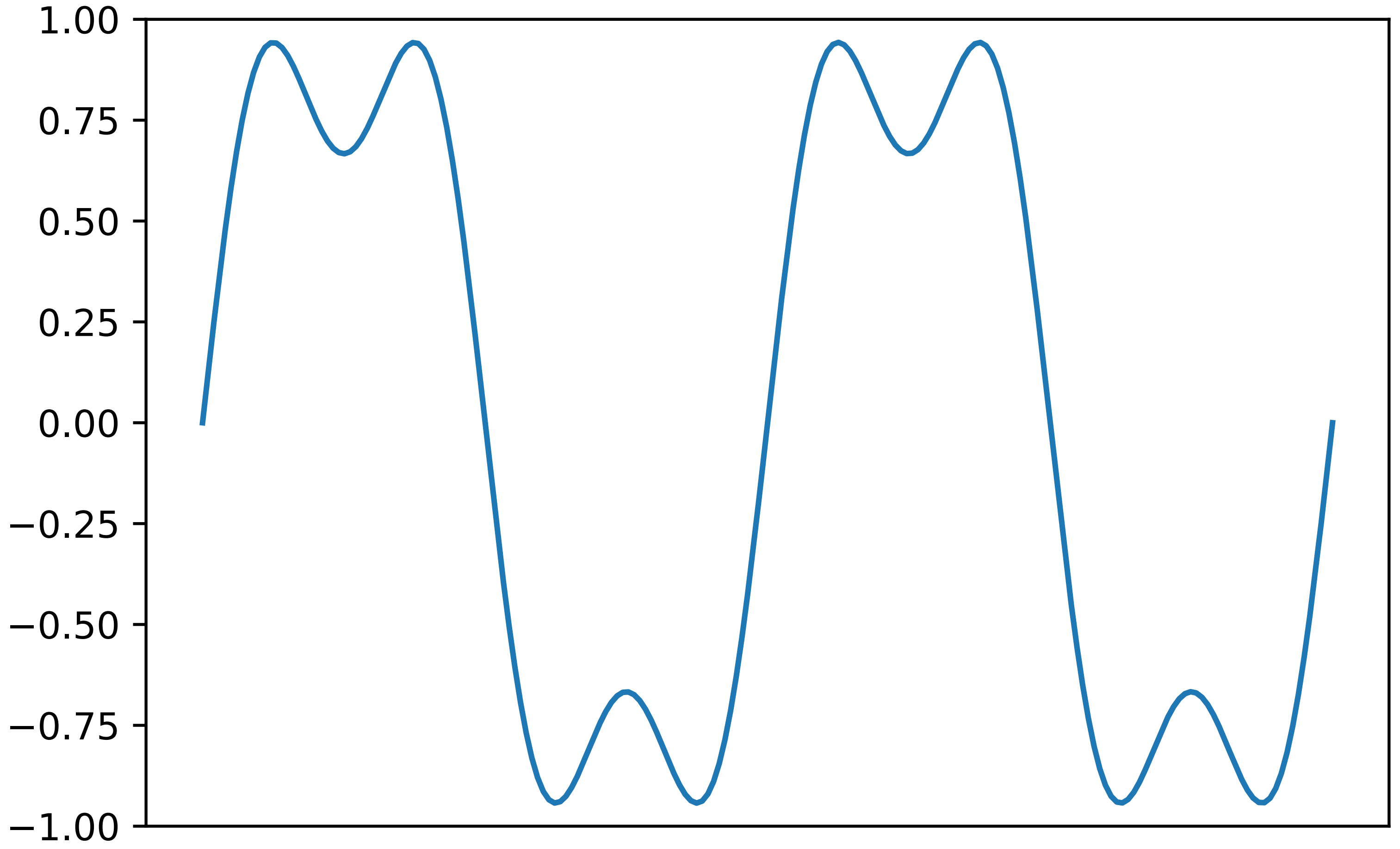
Ici, on utilise t plutôt que x pour désigner la dimension spatiale

exemple : $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f)t)$

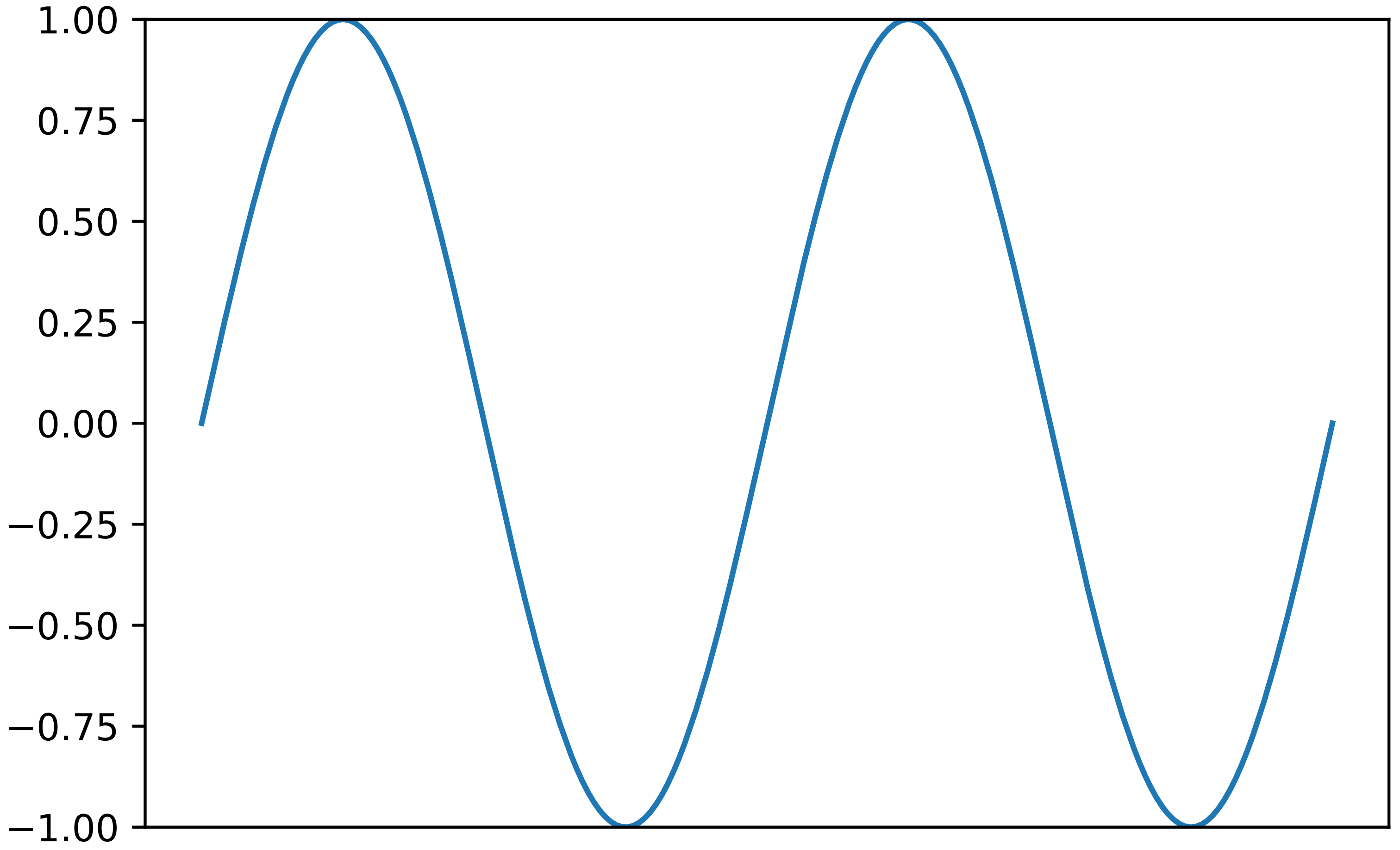


Spectre en fréquences

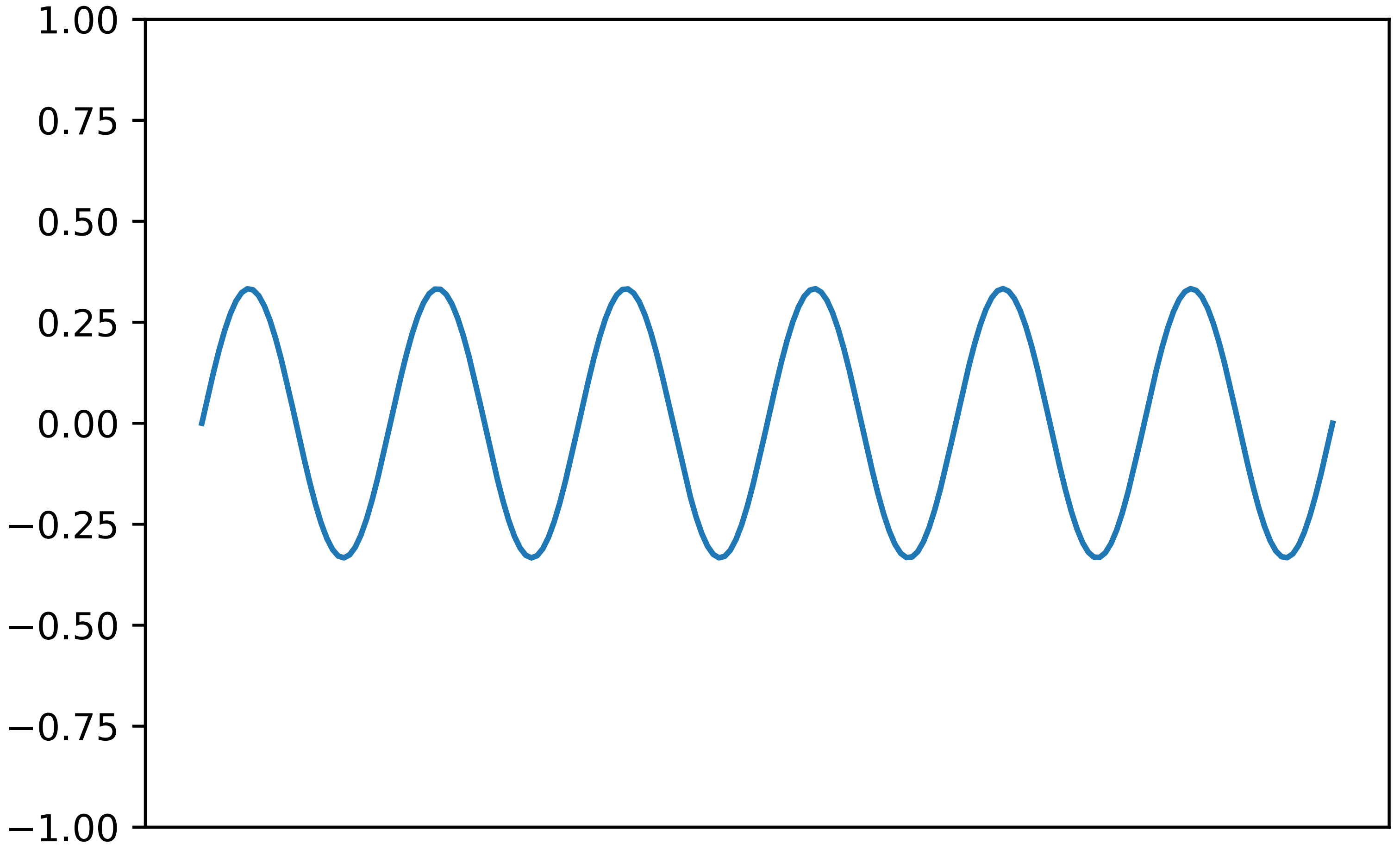
exemple : $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f)t)$



=

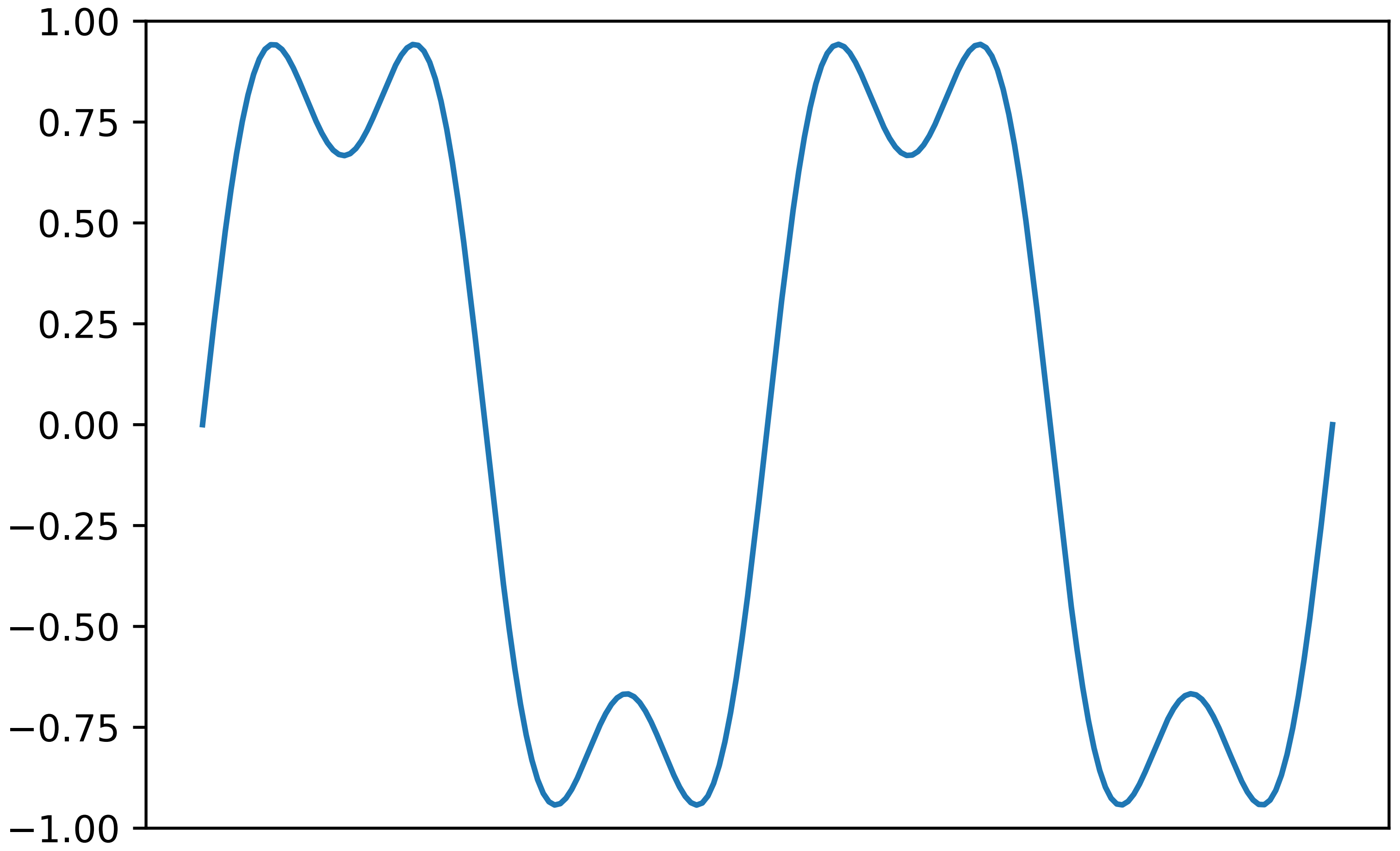


+

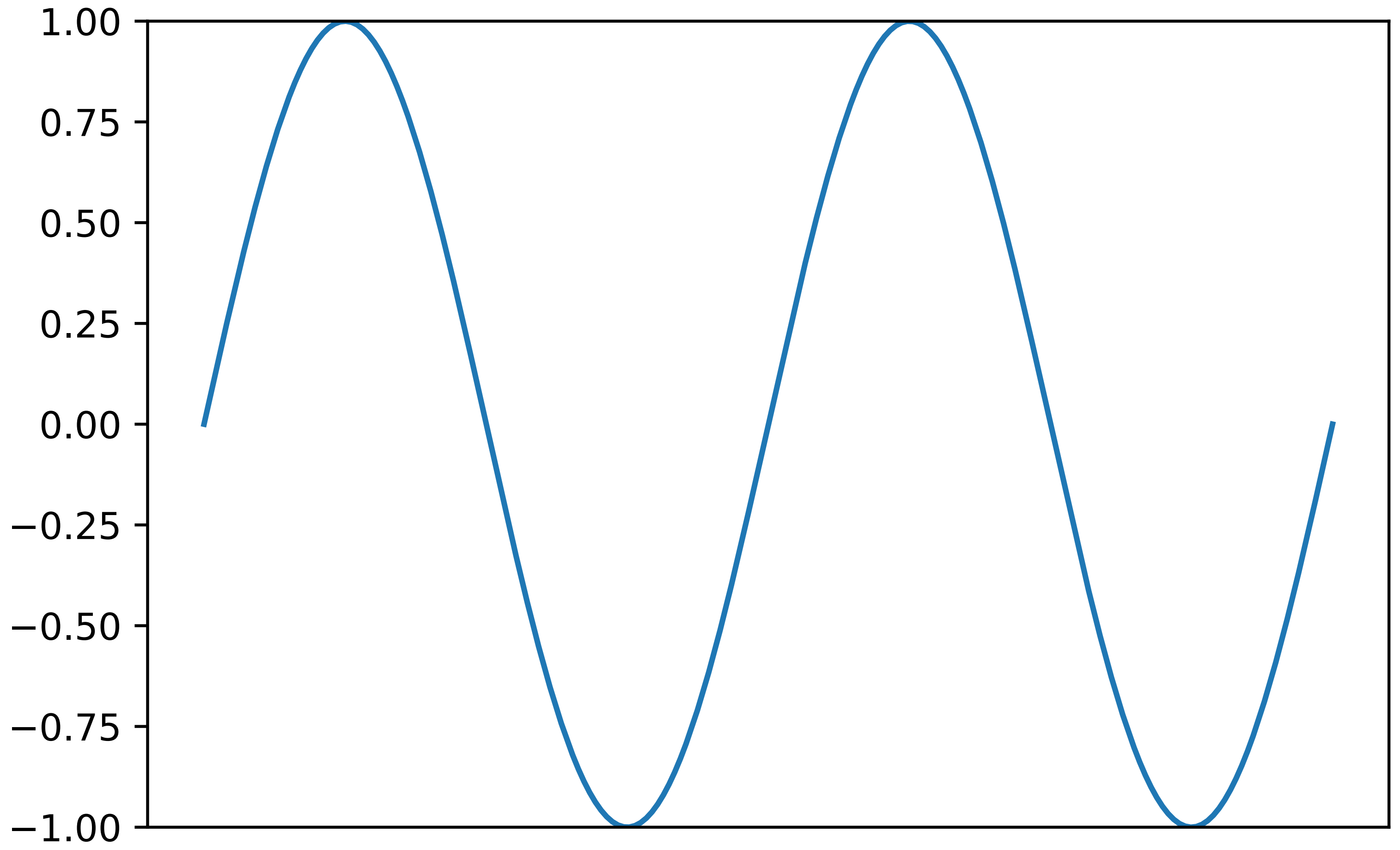


Spectre en fréquences

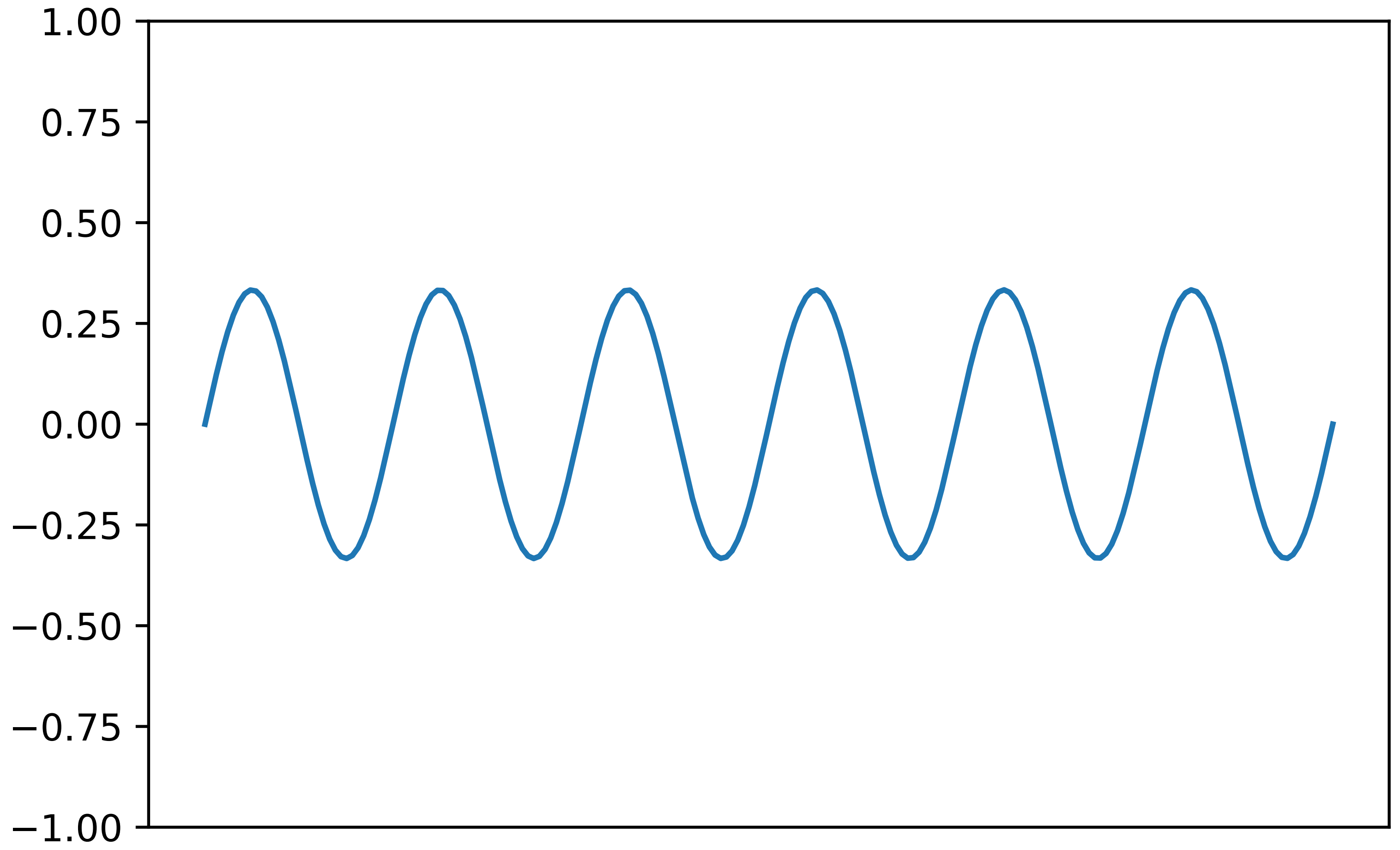
exemple : $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f)t)$



$=$

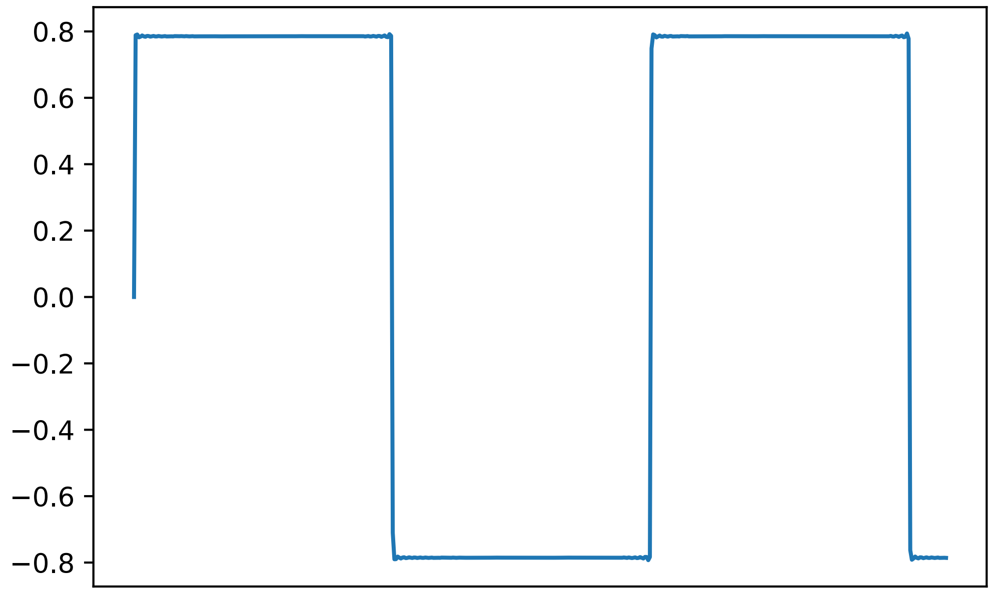


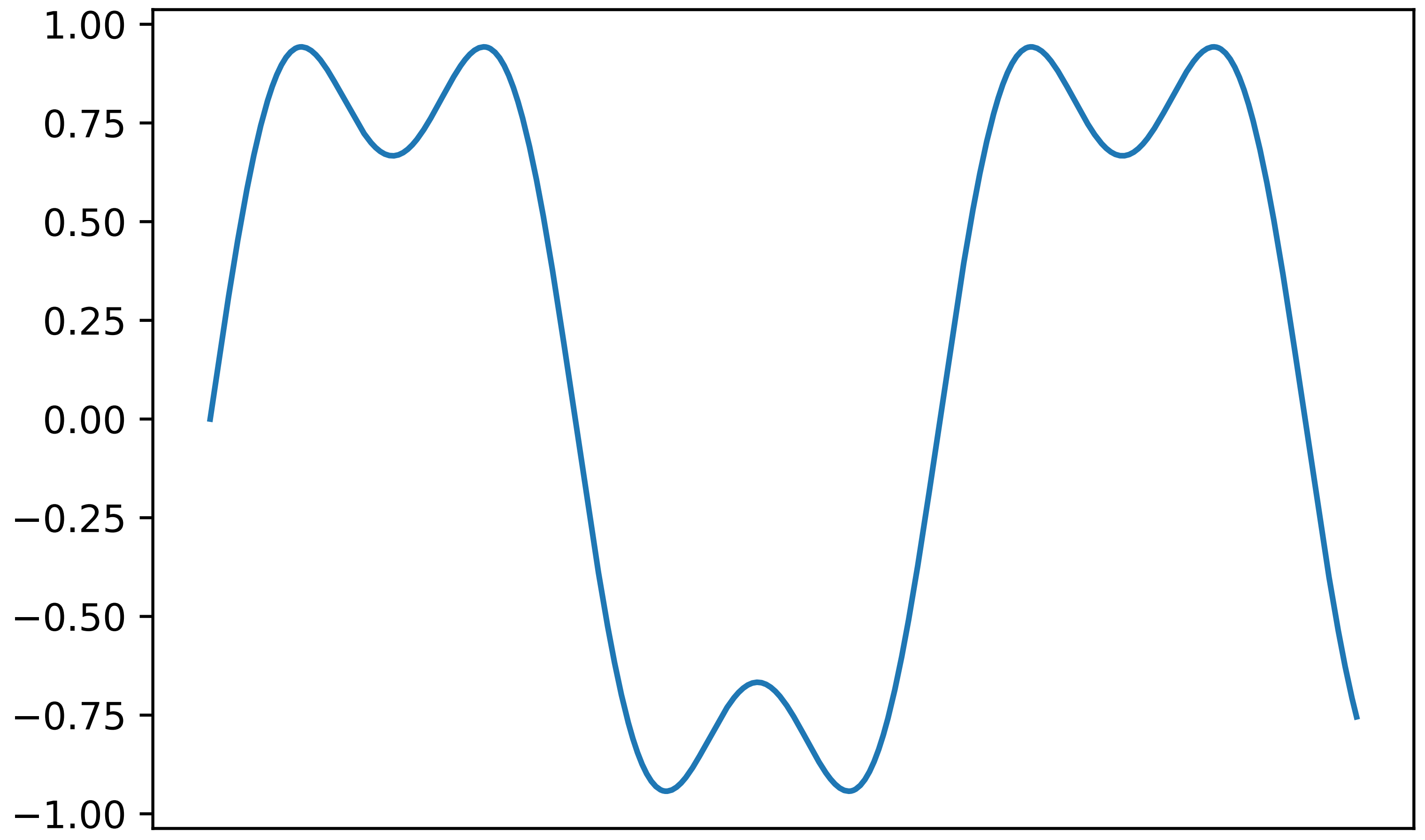
$+$



Spectre en fréquences

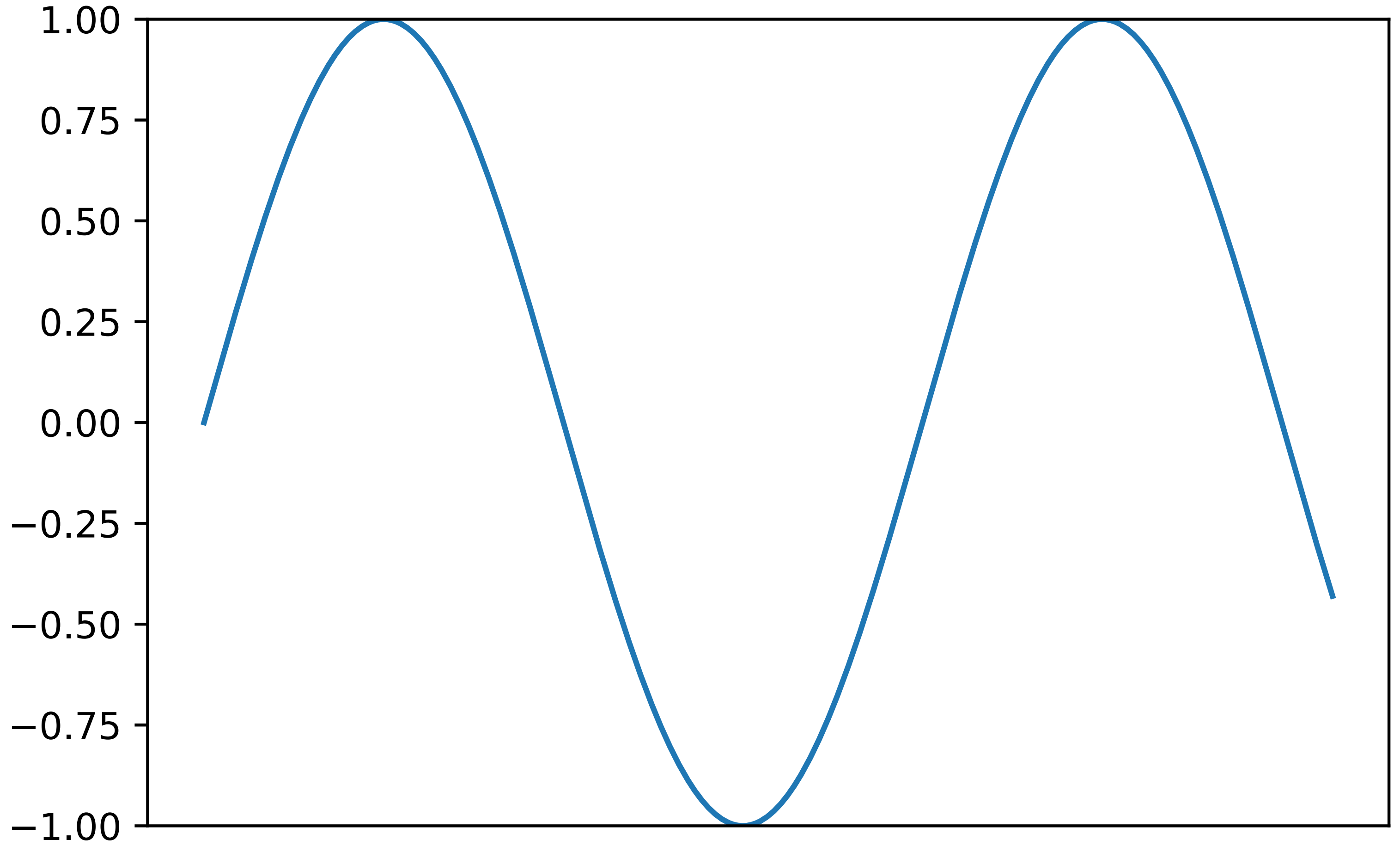
But : représenter ce signal avec des sinus





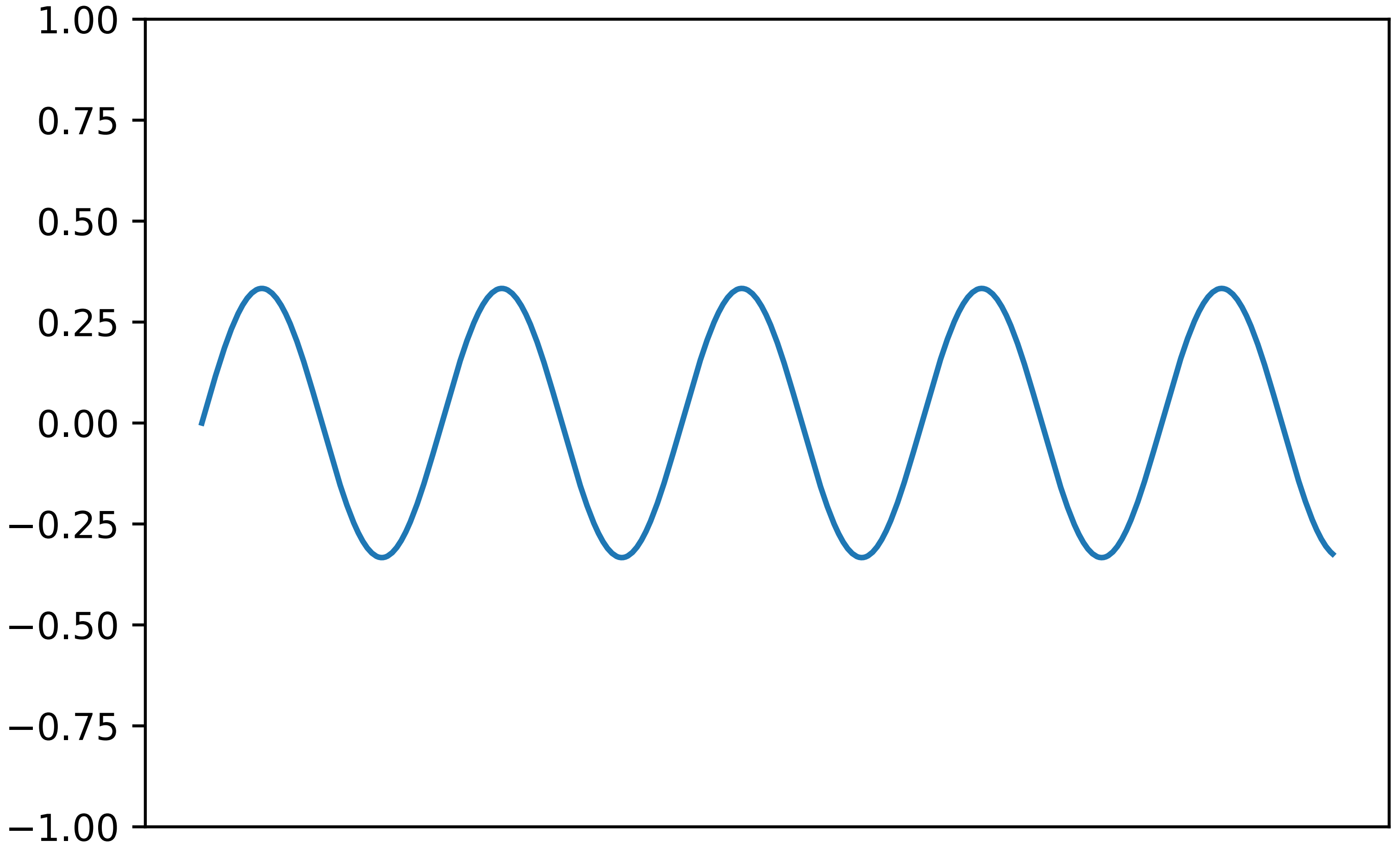
=

$\sin(2\pi f t)$



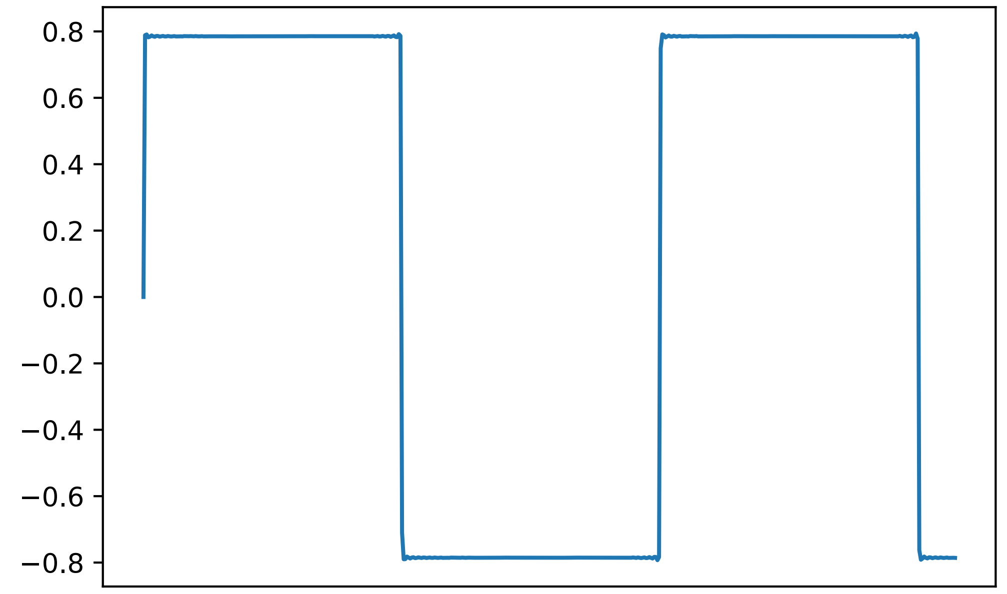
+

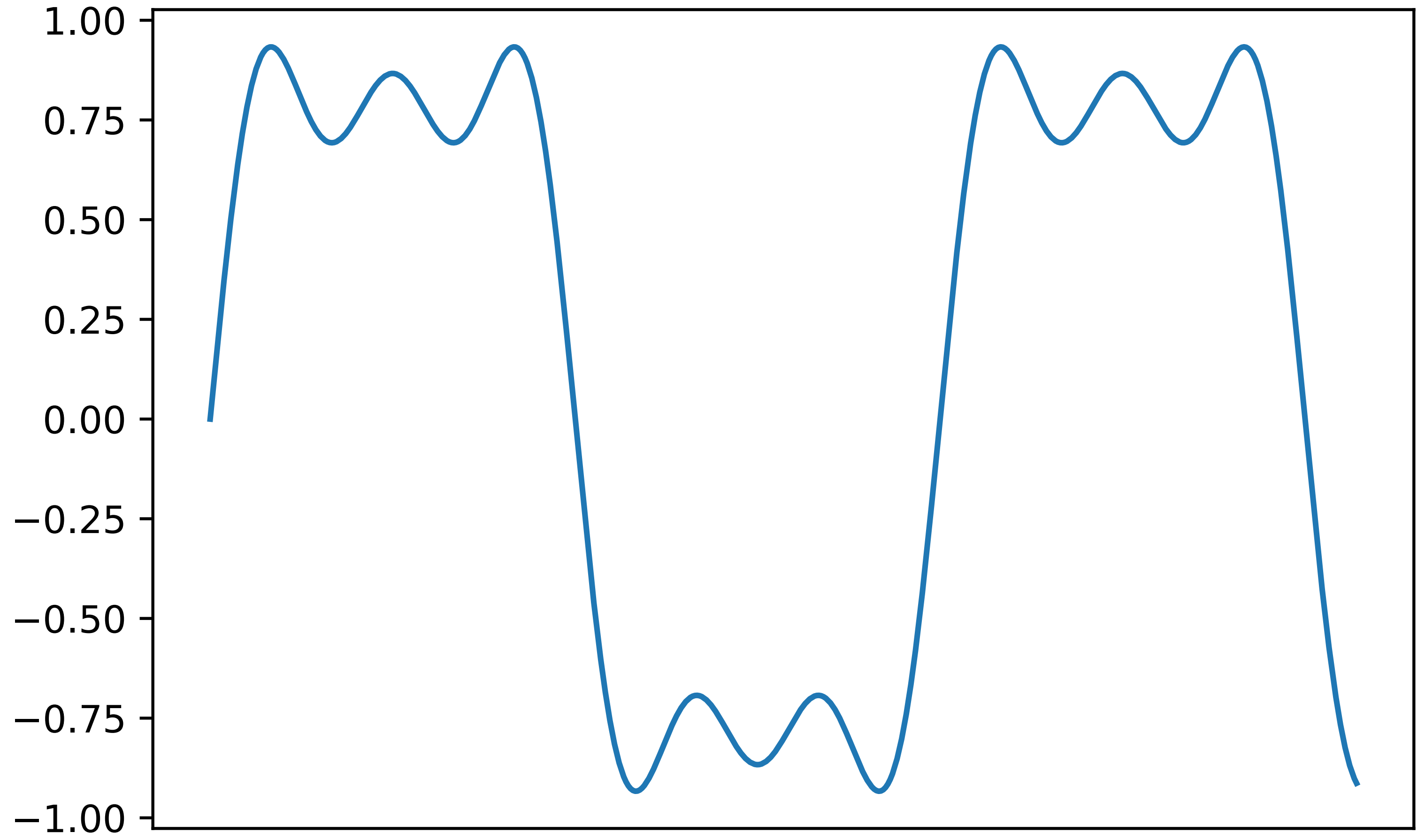
$(1/3)\sin(2\pi(3f)t)$



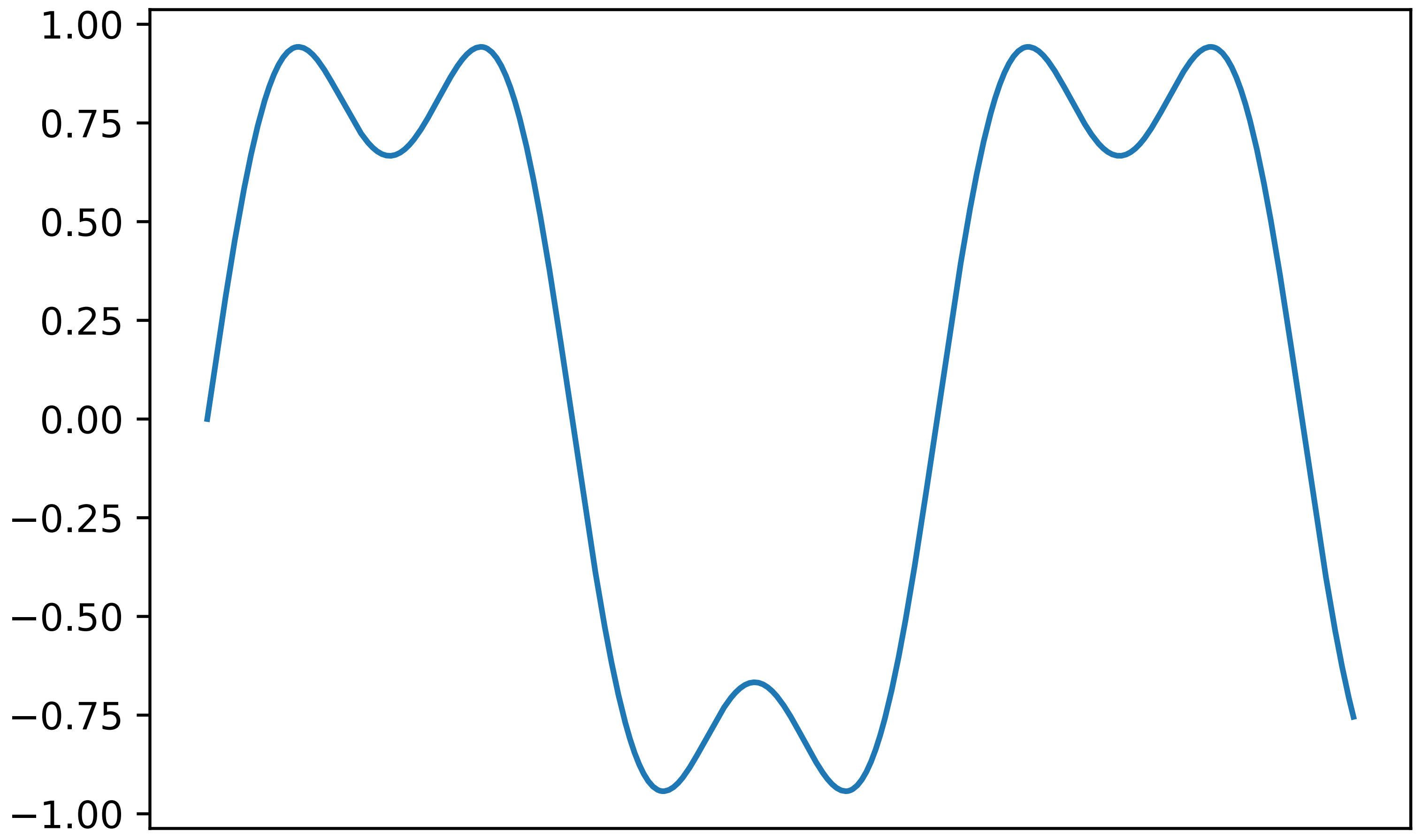
Spectre en fréquences

But : représenter ce signal avec des sinus



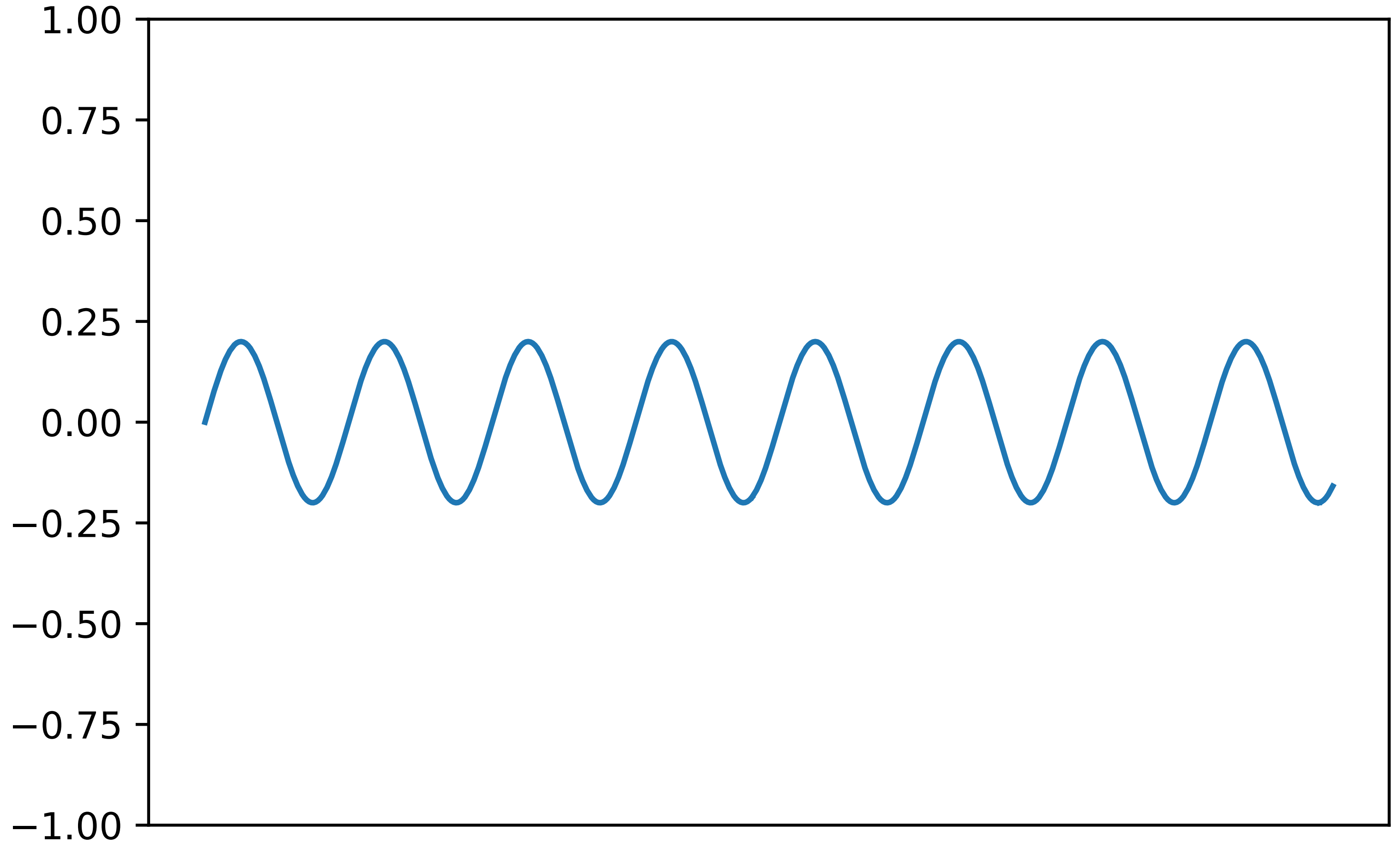


=



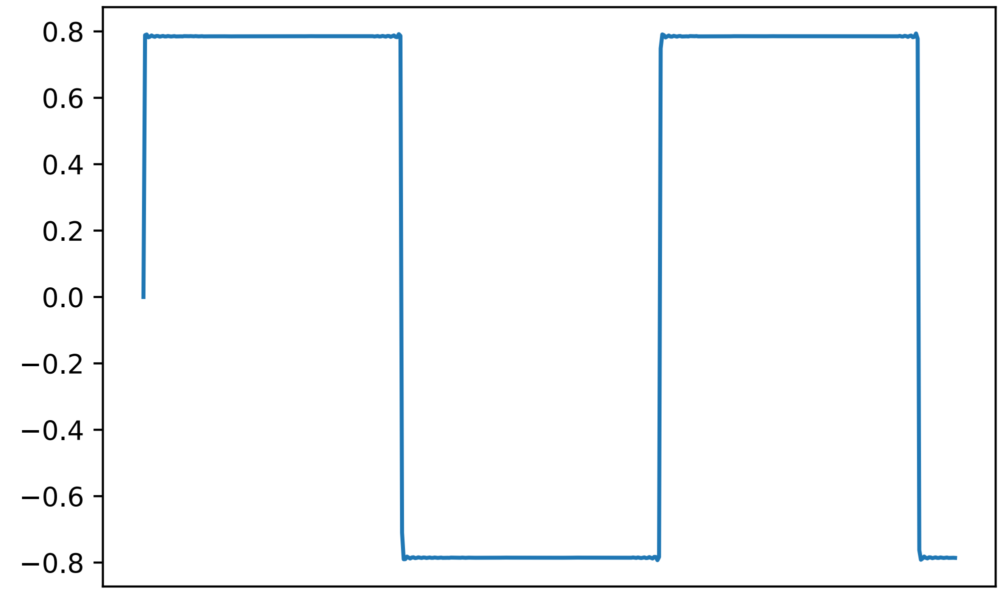
+

$$(1/5)\sin(2\pi(5f)t)$$

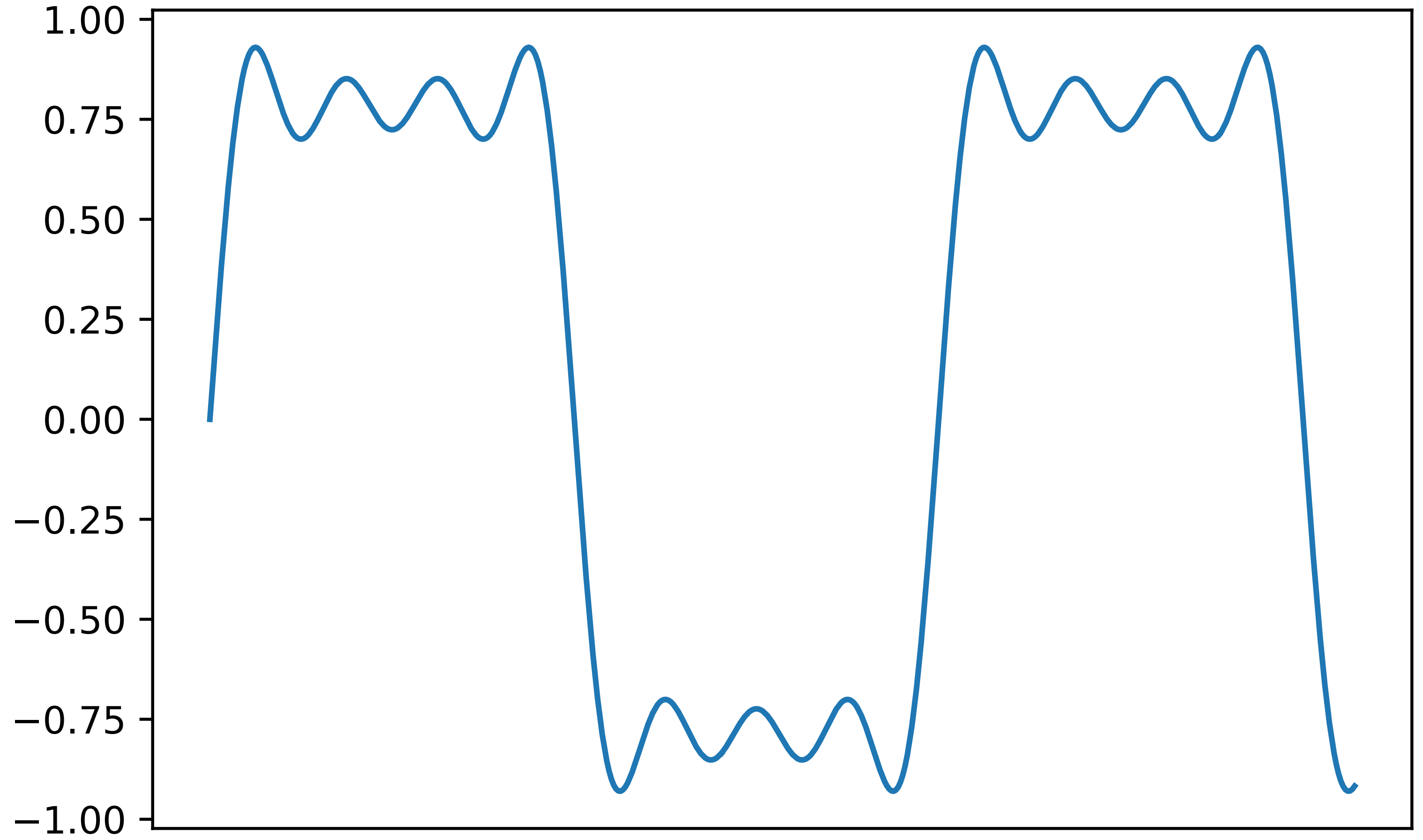


Spectre en fréquences

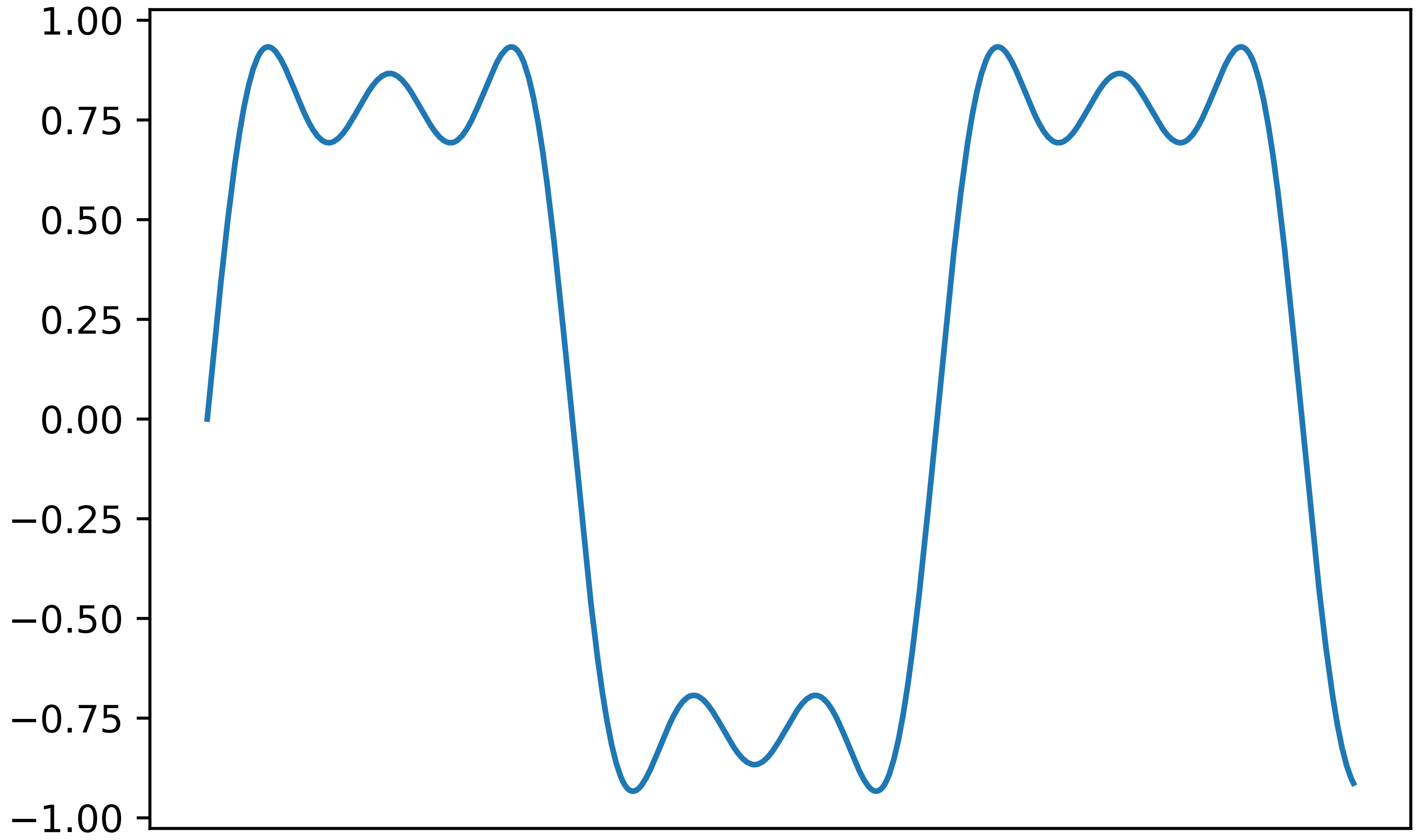
But : représenter ce signal
avec des sinus



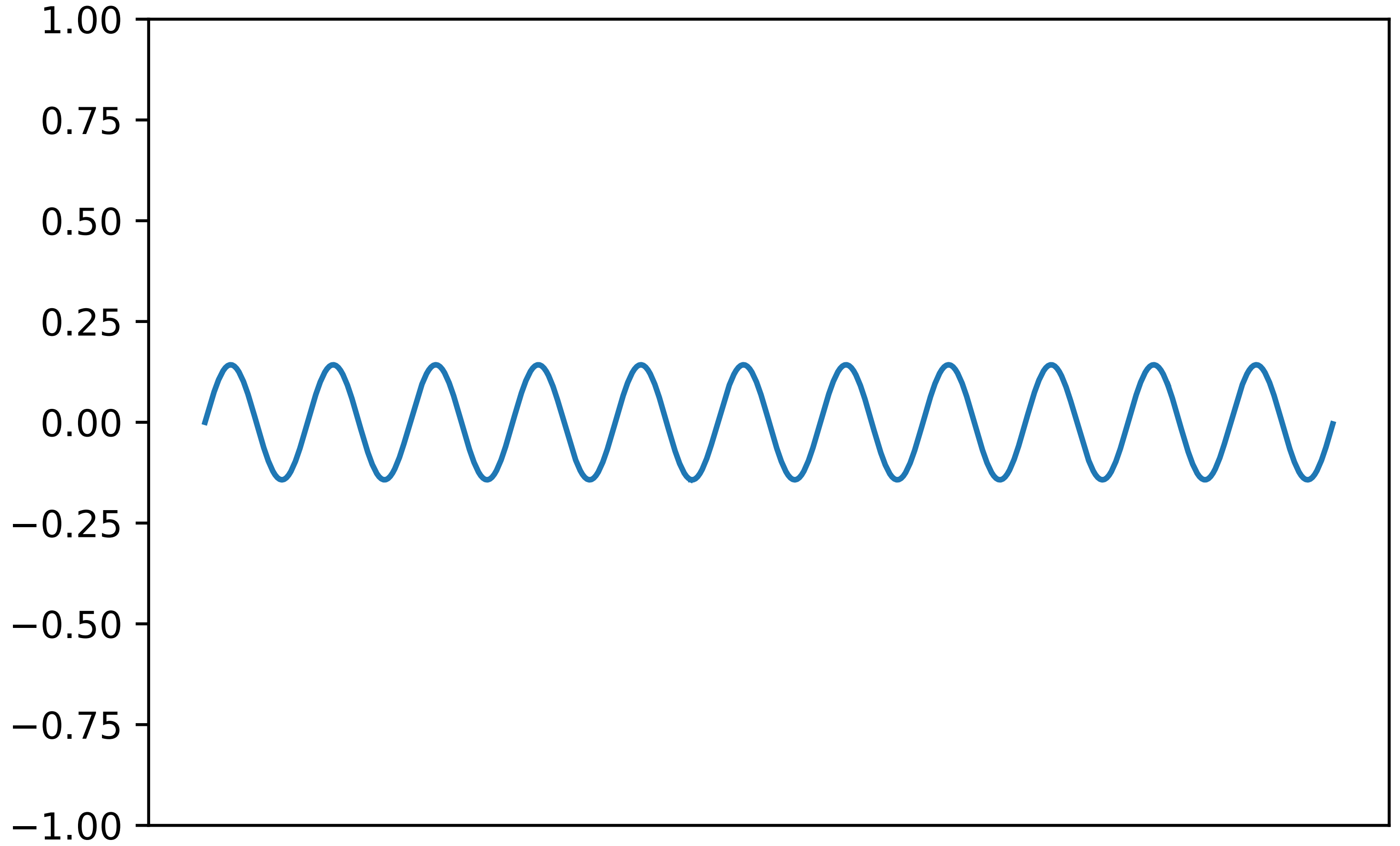
$$(1/7)\sin(2\pi(7f)t)$$



=

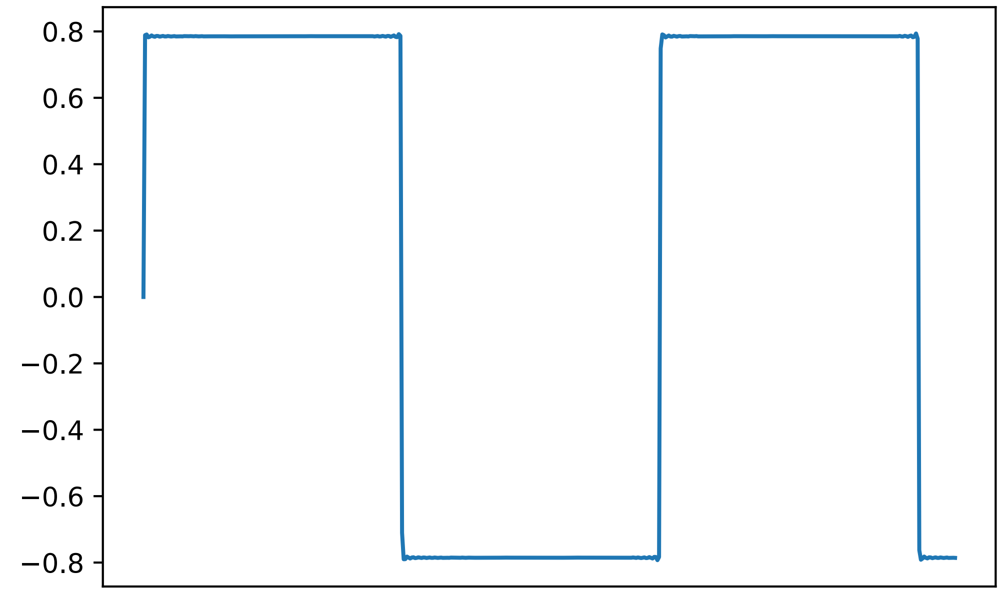


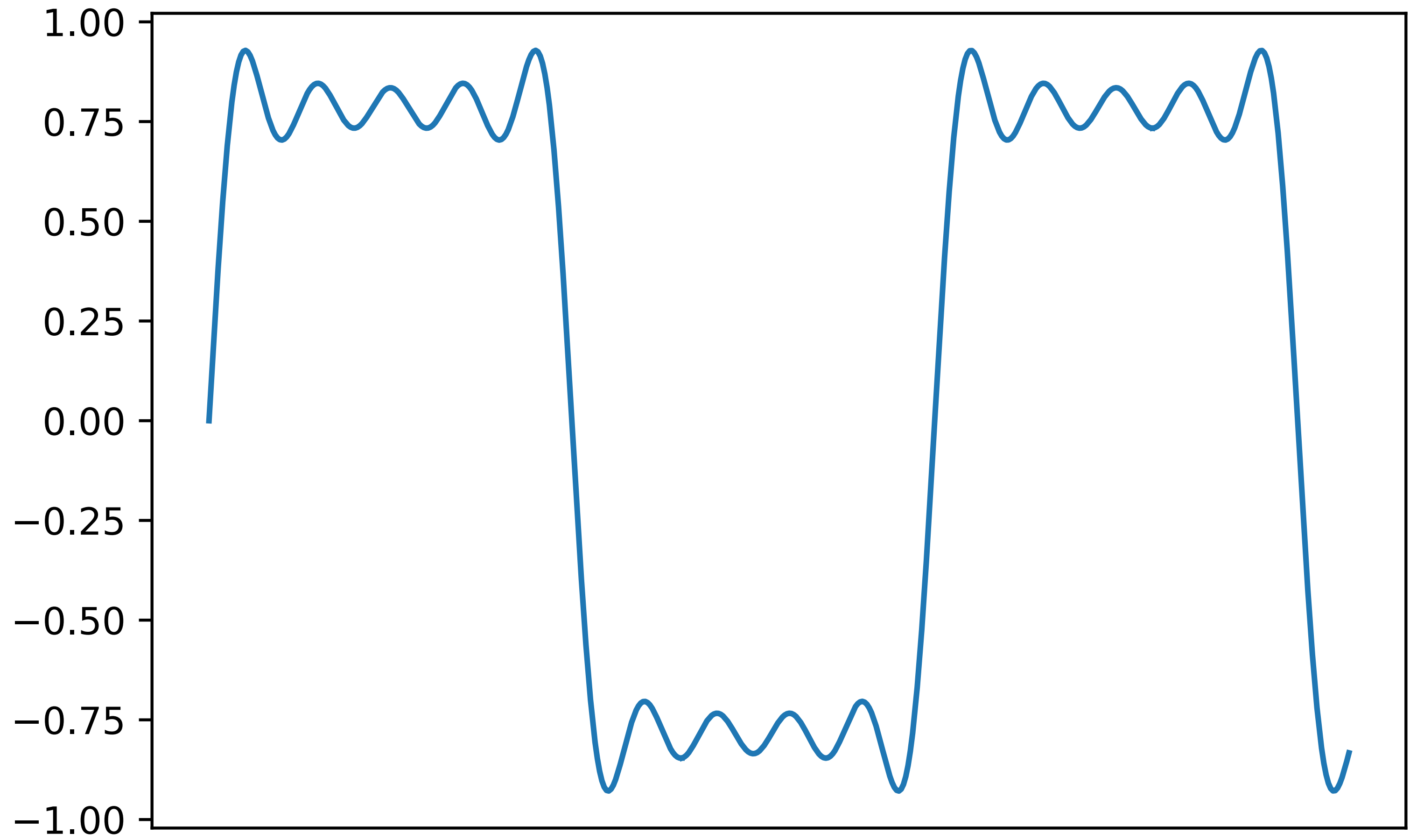
+



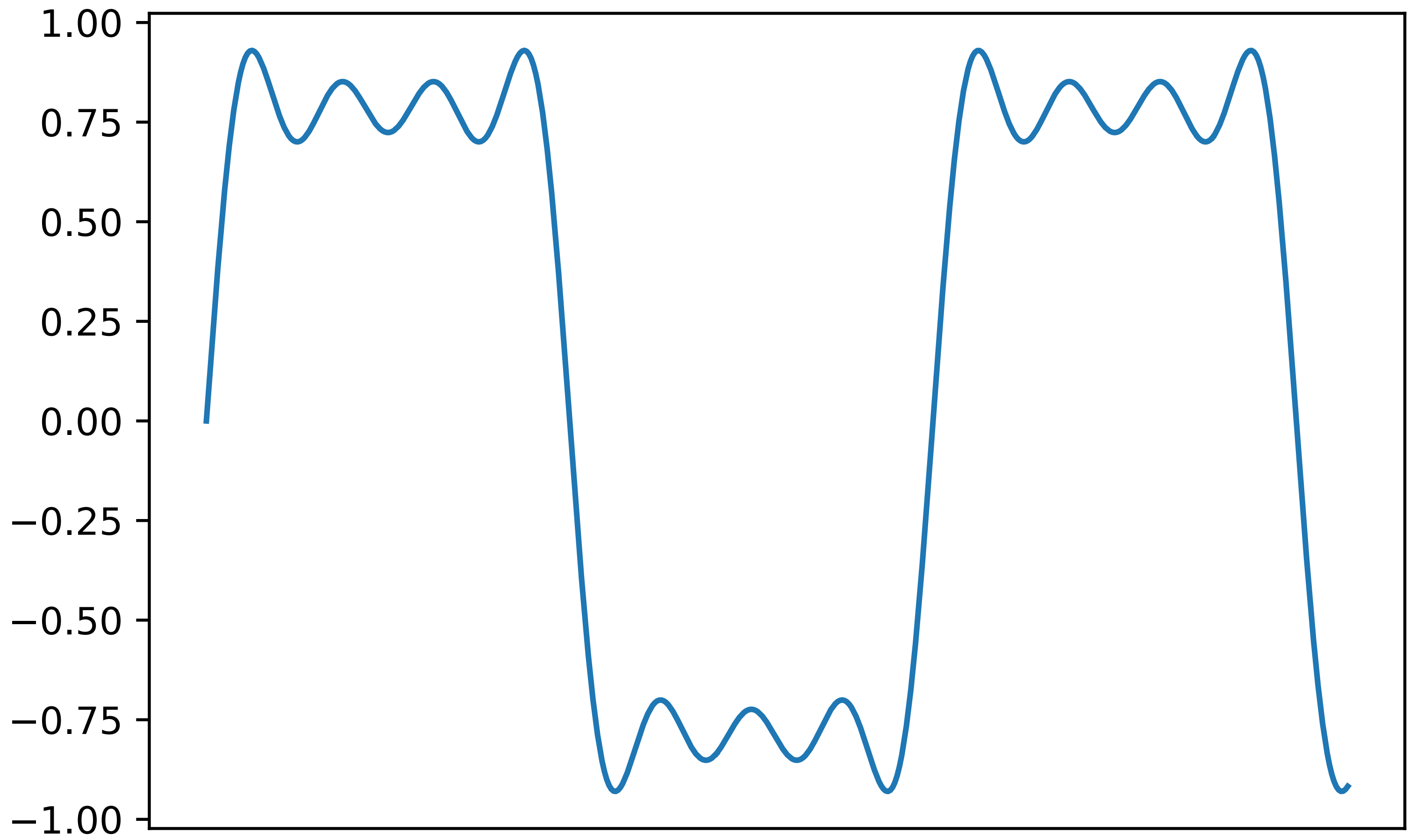
Spectre en fréquences

But : représenter ce signal avec des sinus



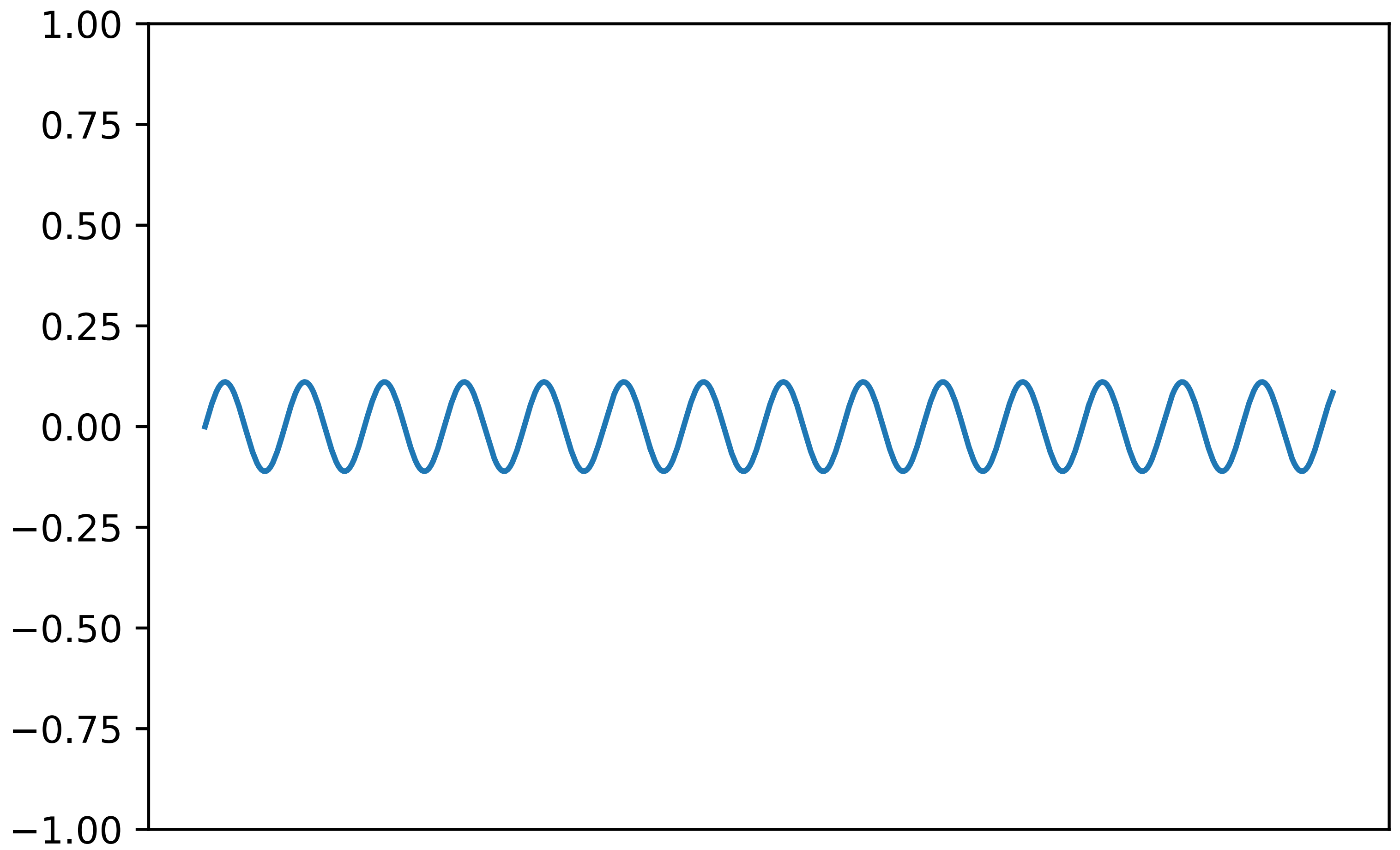


=



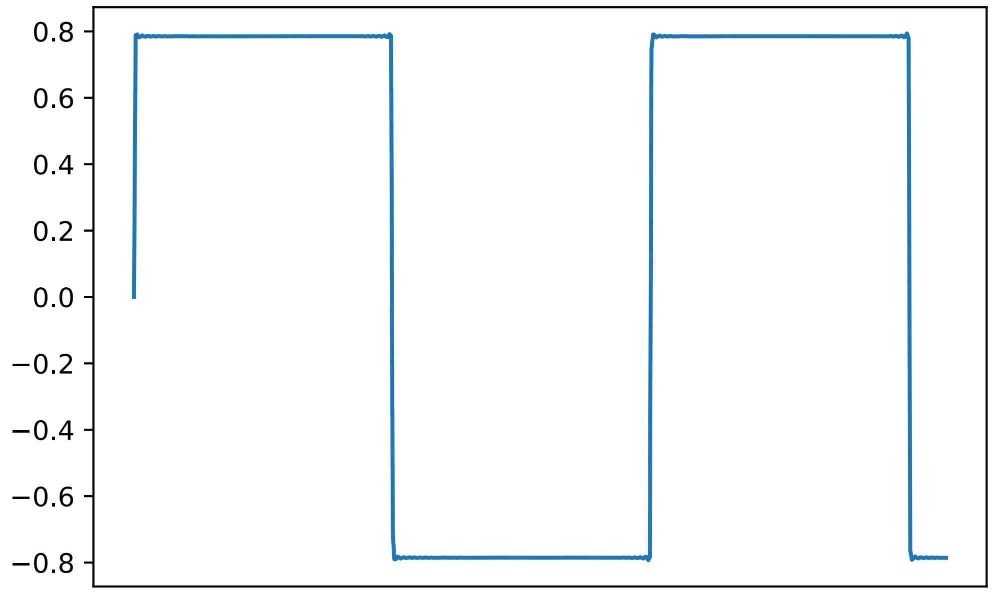
+

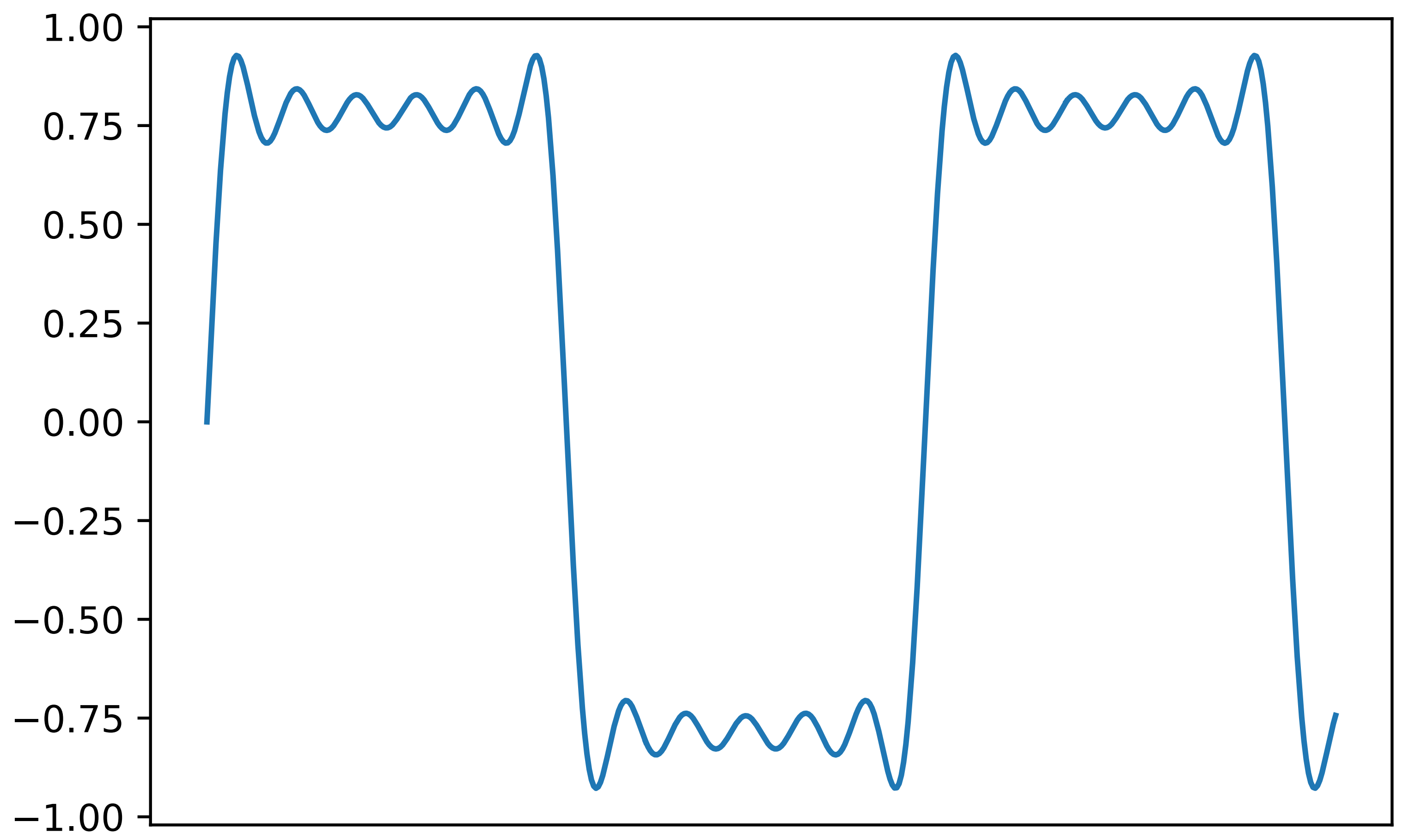
$(1/9)\sin(2\pi(9f)t)$



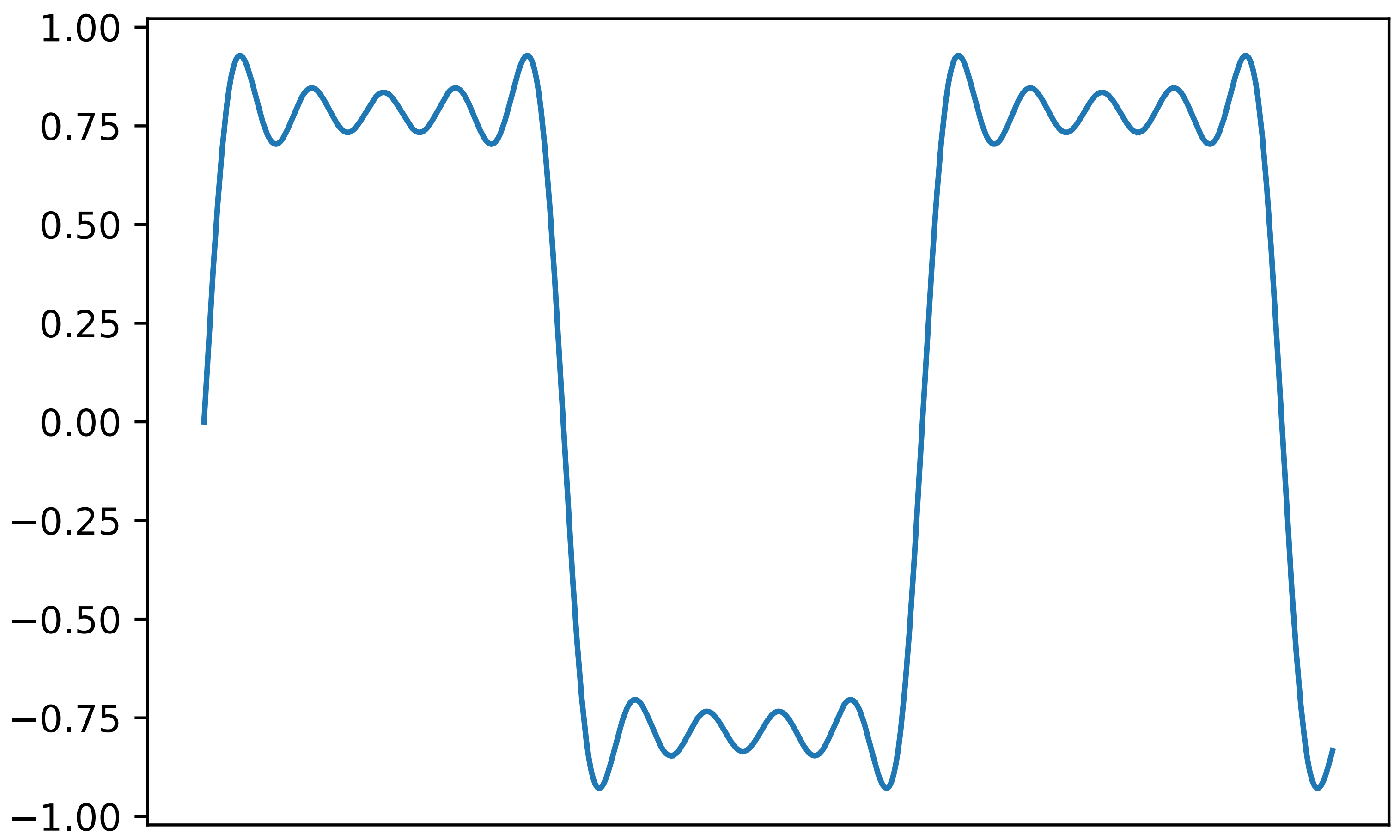
Spectre en fréquences

But : représenter ce signal avec des sinus



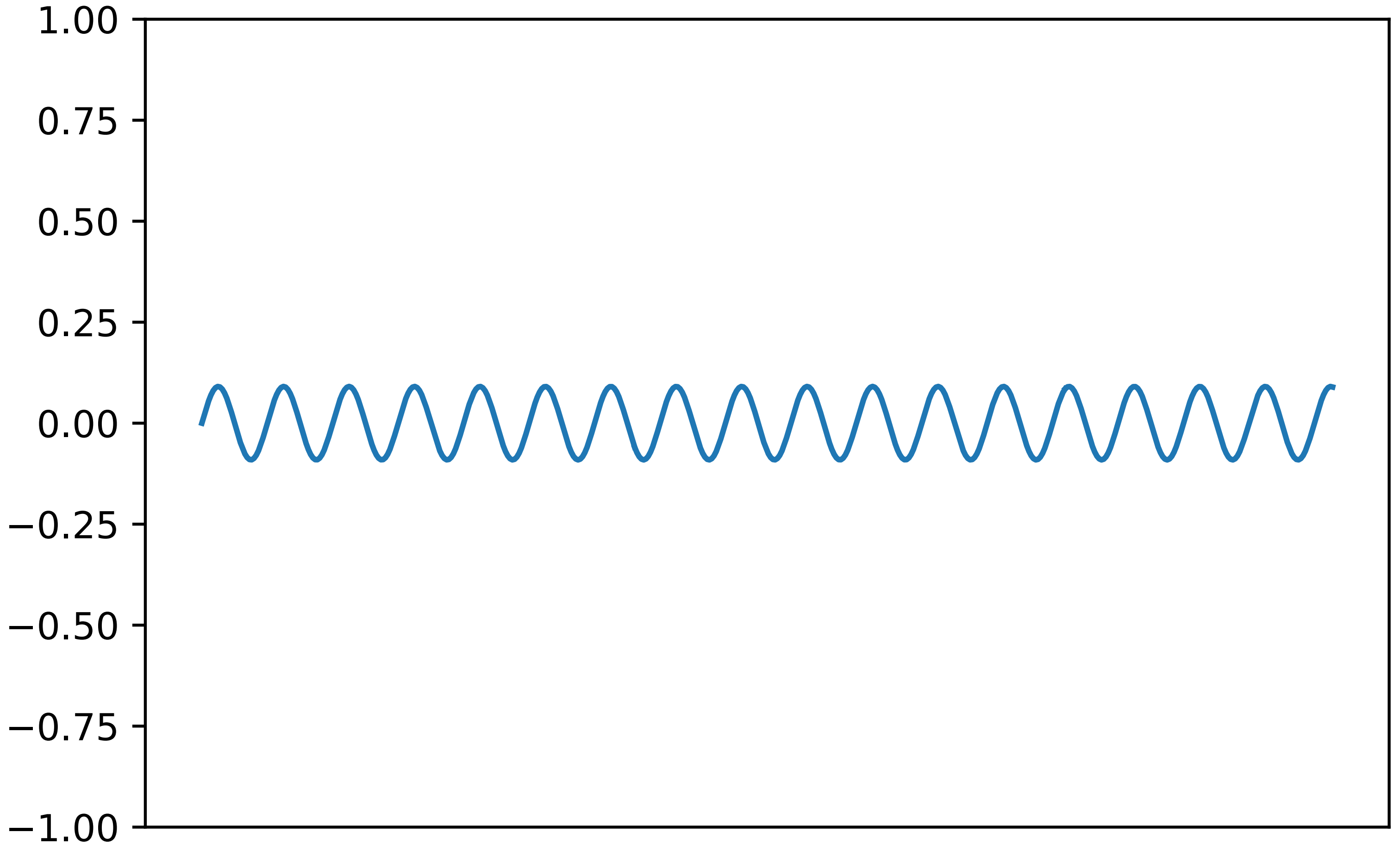


=



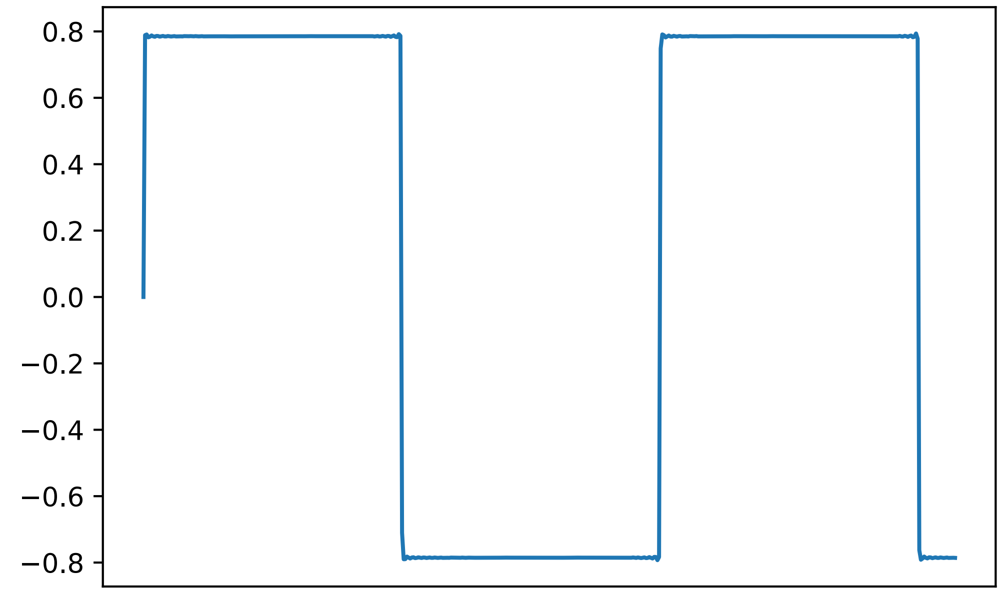
+

$(1/11)\sin(2\pi(11f)t)$



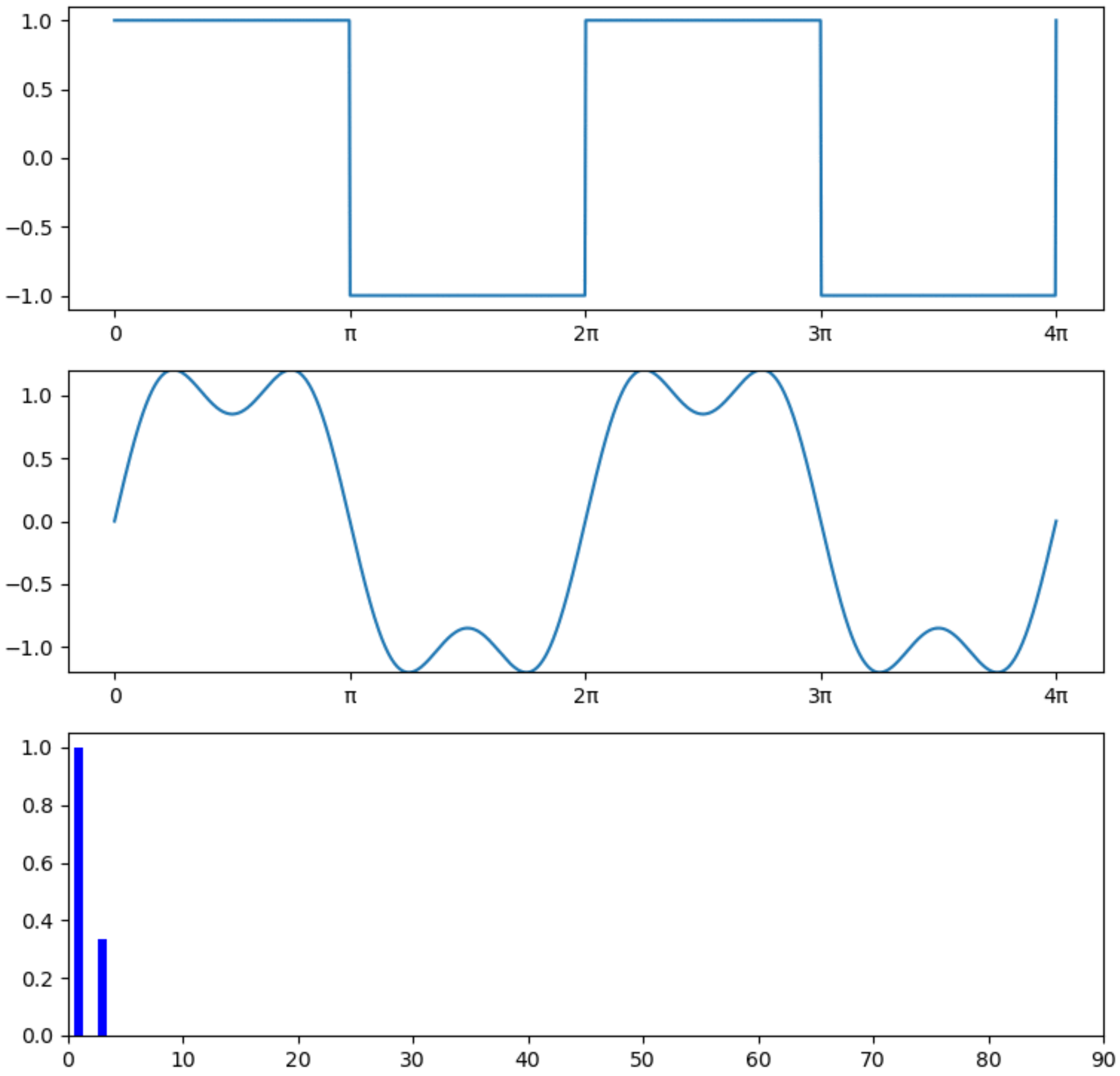
Spectre en fréquences

But : représenter ce signal
avec des sinus

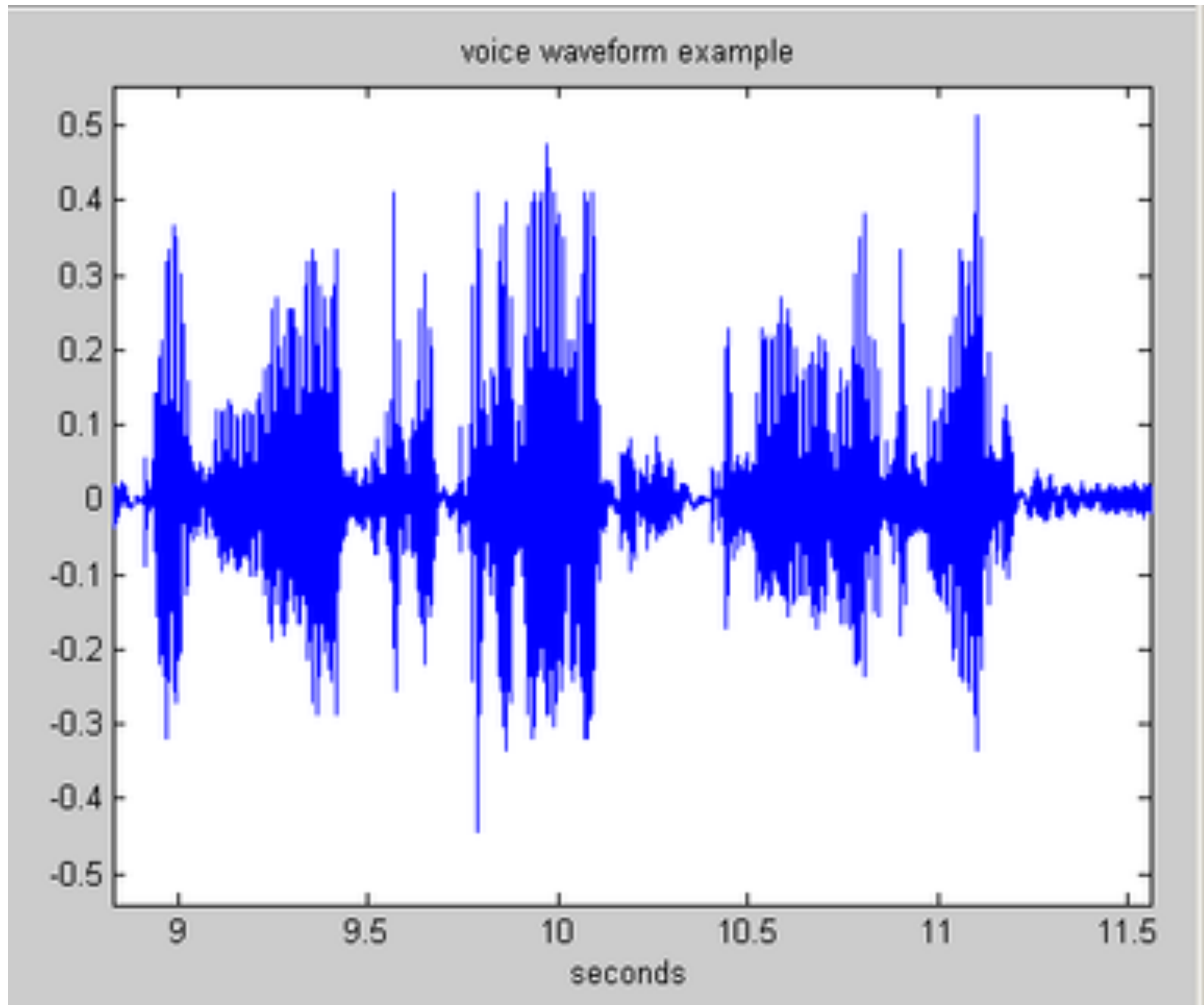


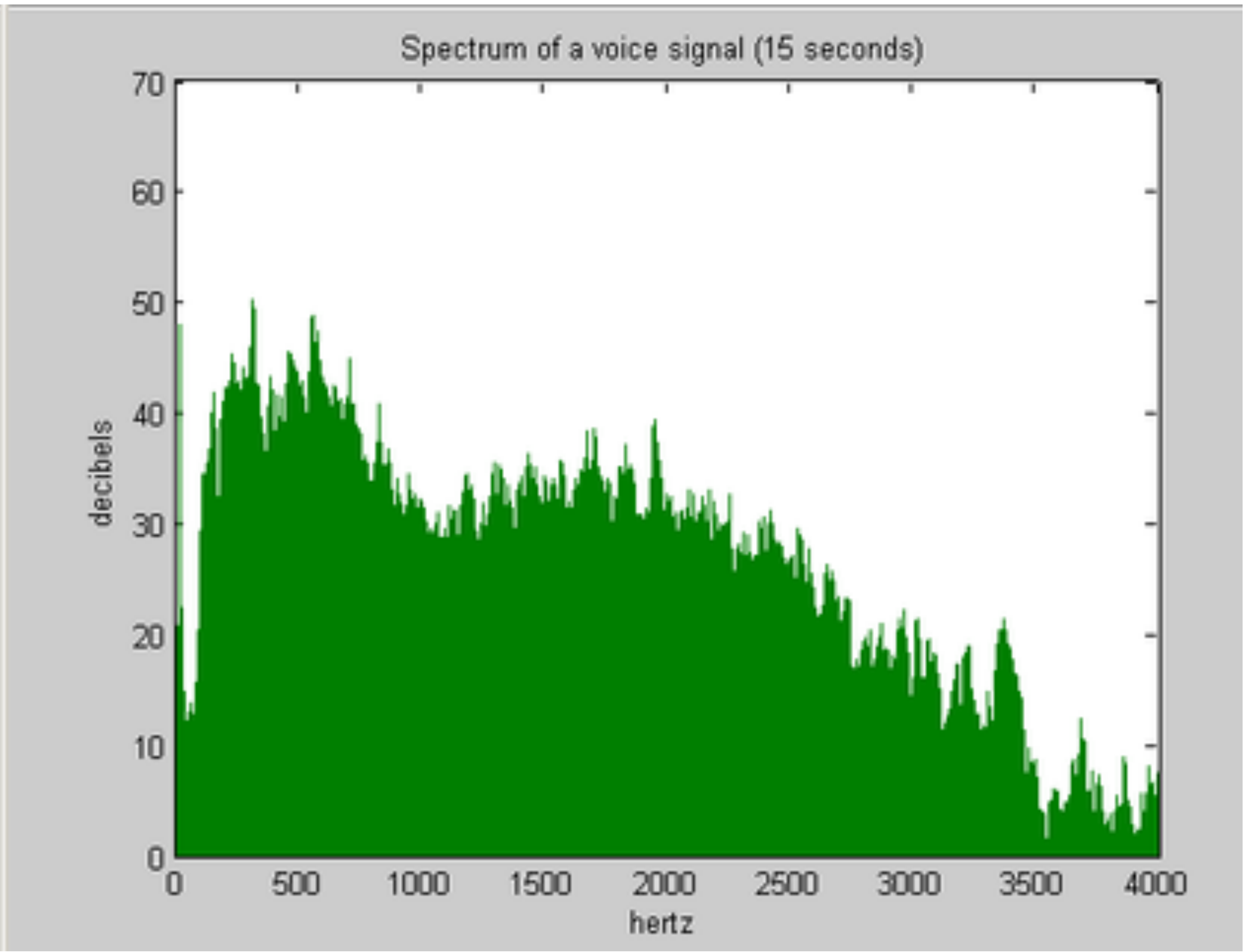
$$\sum_{k=1,\text{k impair}}^{\infty} \frac{1}{k}\sin(2\pi k t)$$

Source : Efros

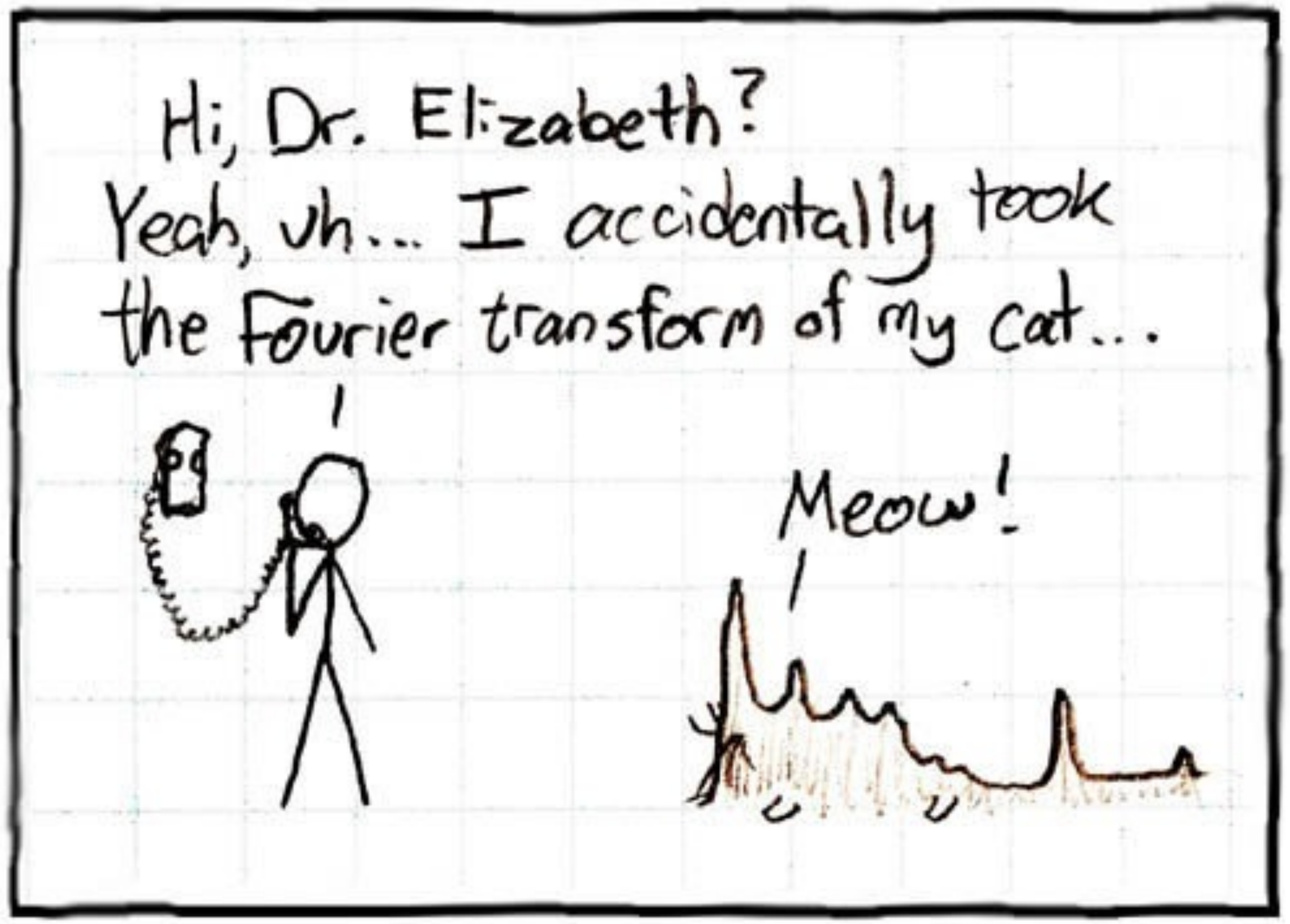

1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
π
2π
3π
4π
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
π
2π
3π
4π
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90

Exemple: musique





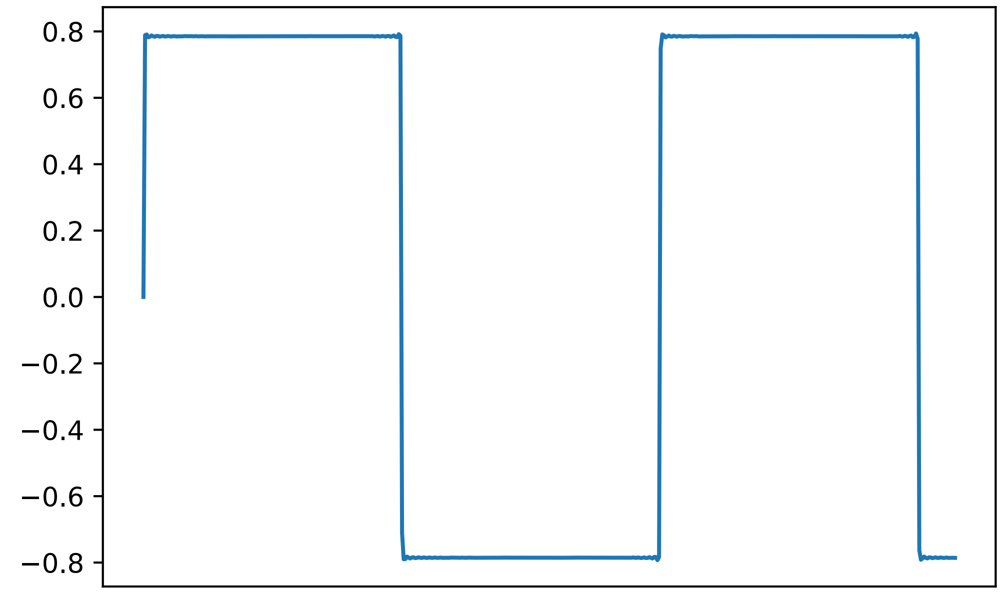
Autres signaux



xkcd.com

Spectre en fréquences

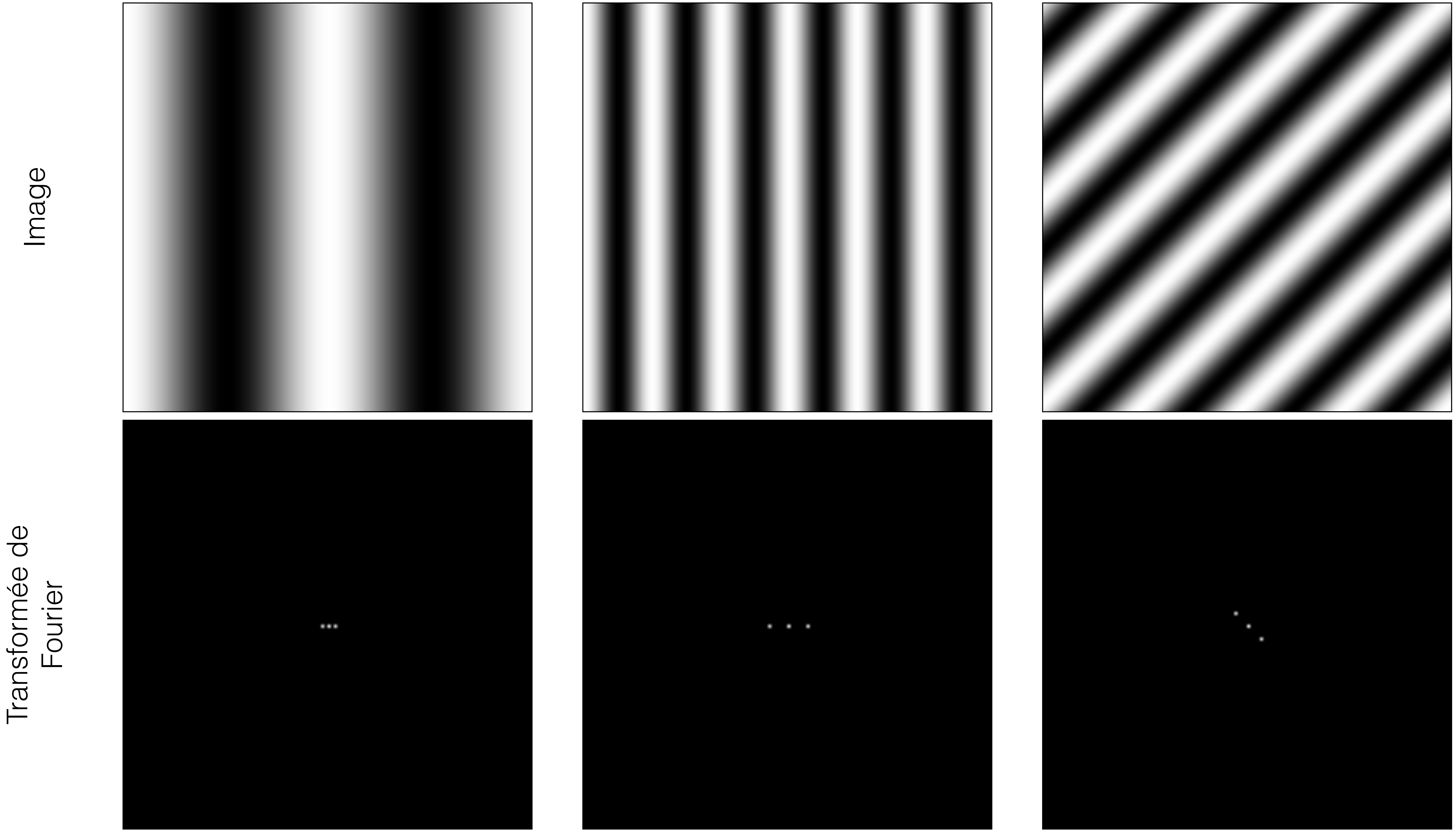
But : représenter ce signal avec des sinus



$$\sum_{k=1,\text{k impair}}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi k t)$$

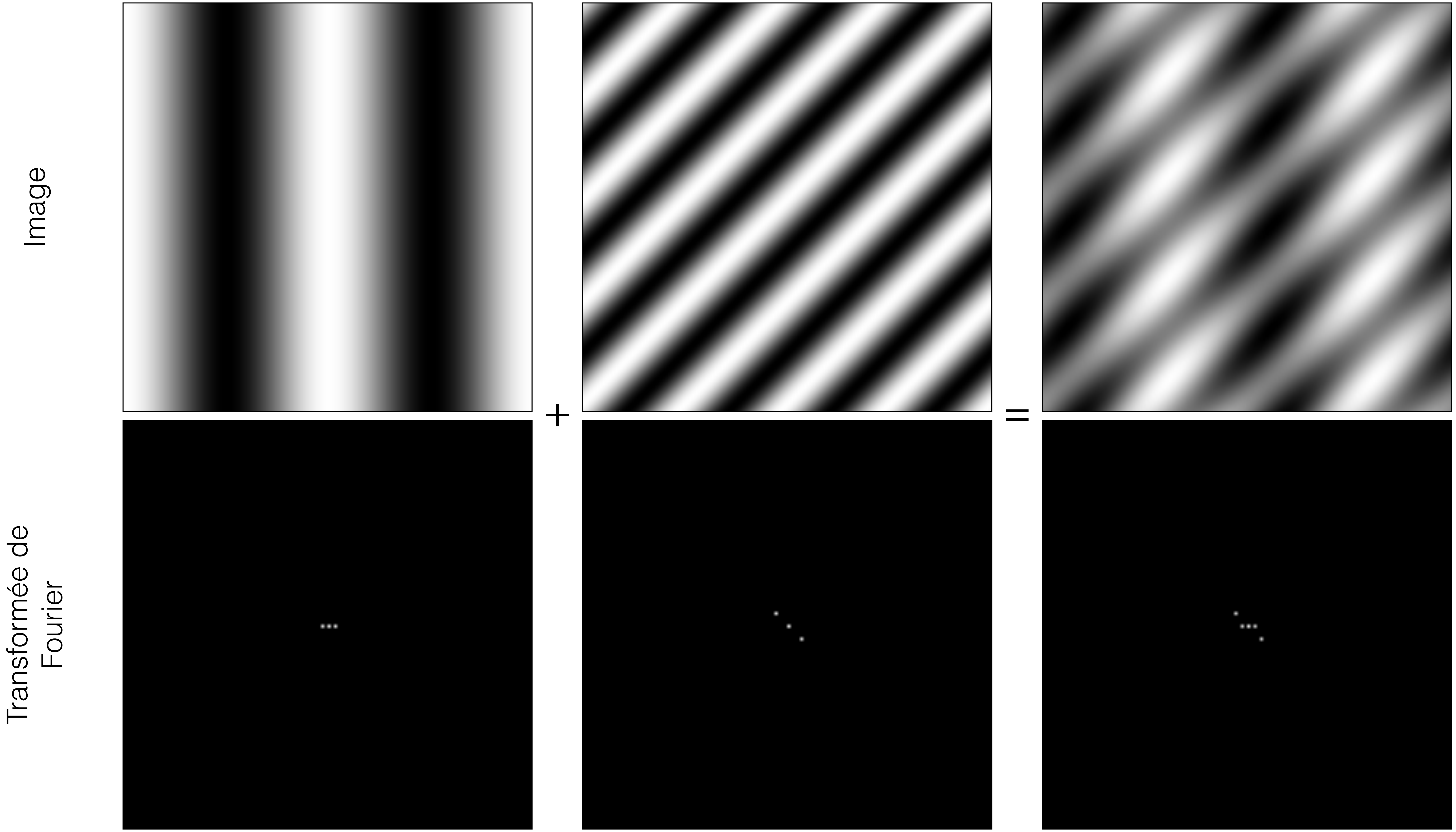
Source : Efros

Transformée de Fourier dans les images



http://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html

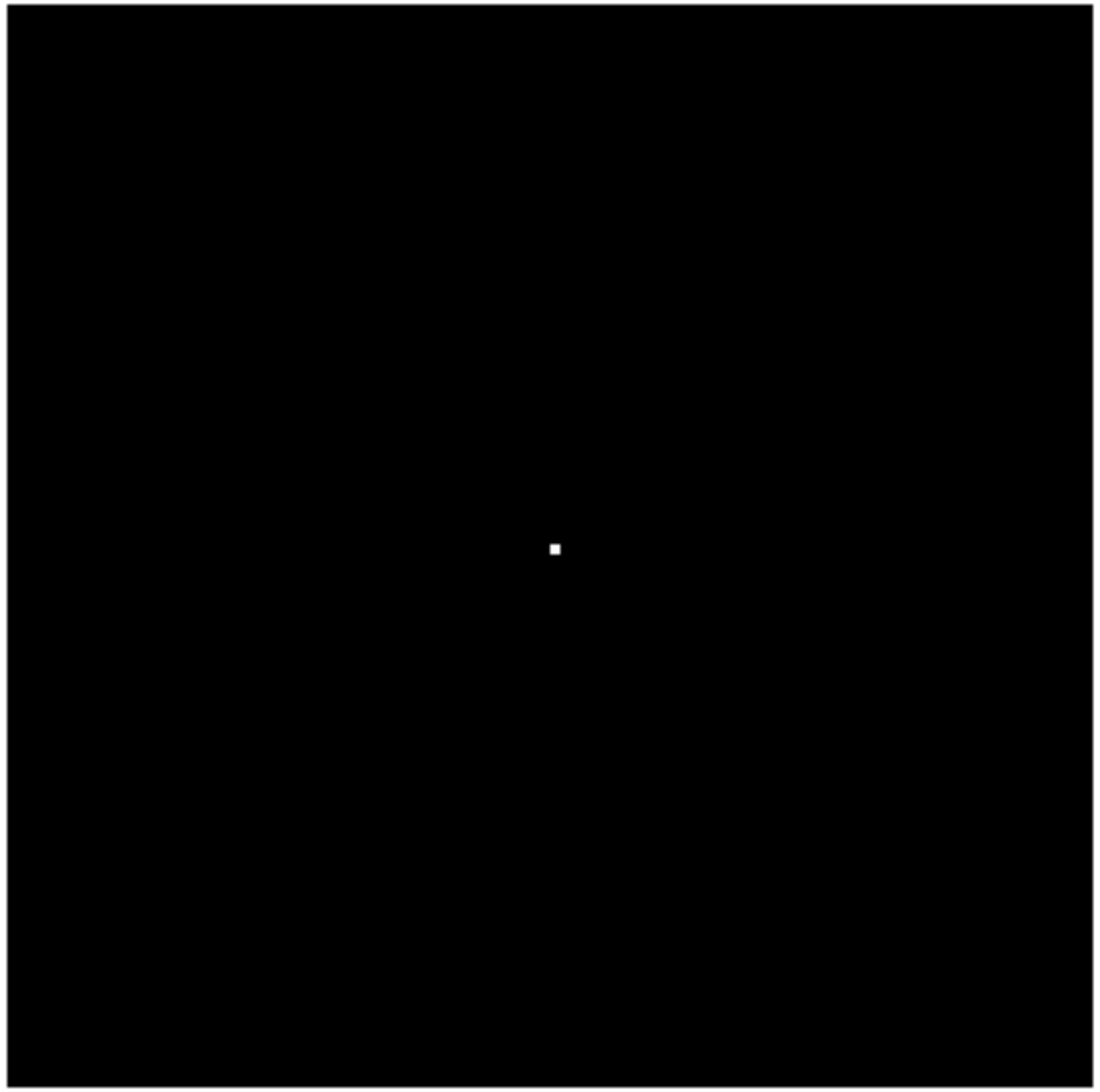
On peut composer les images



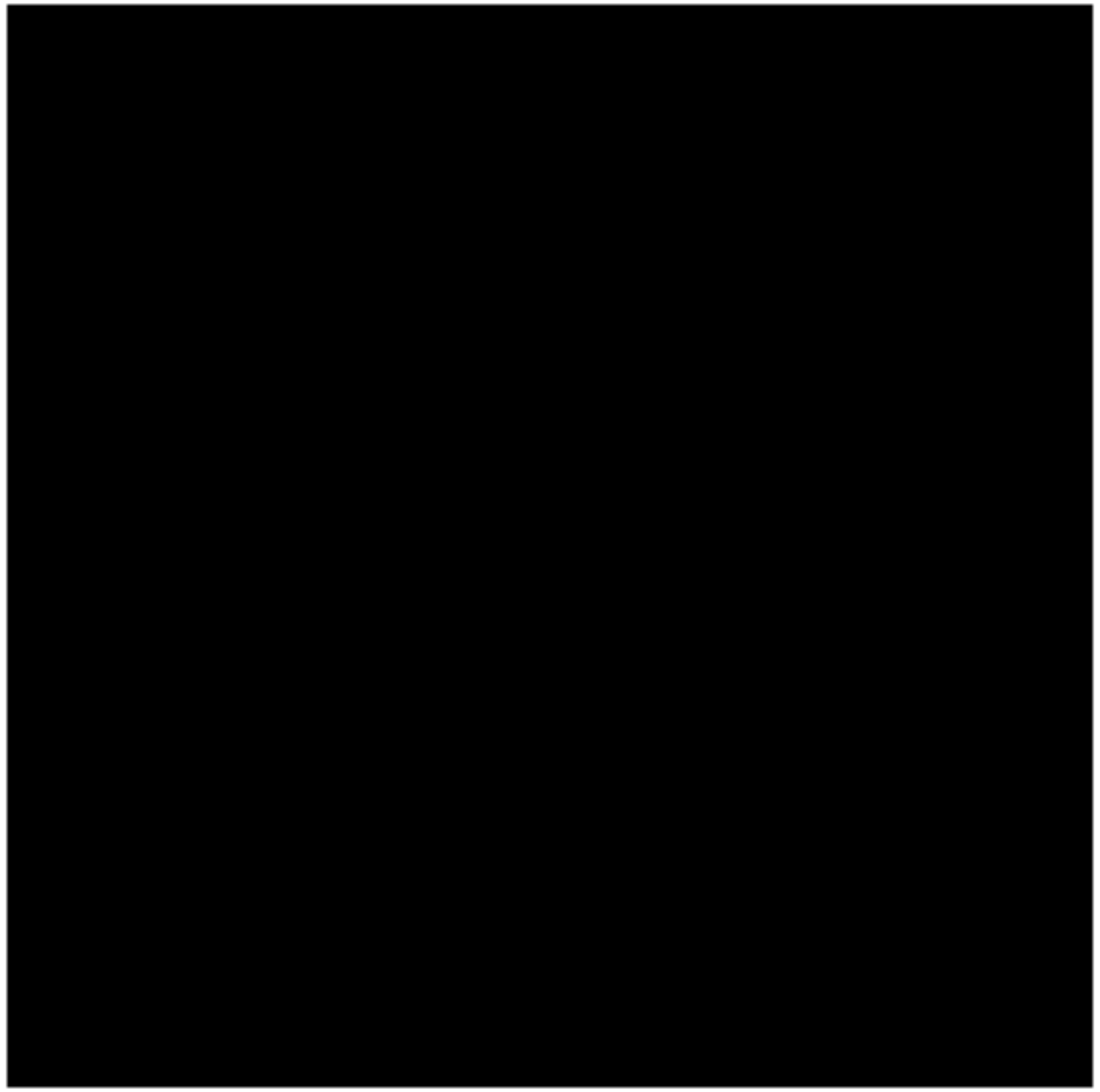
http://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html

Changements en fréquence

Transformée de Fourier



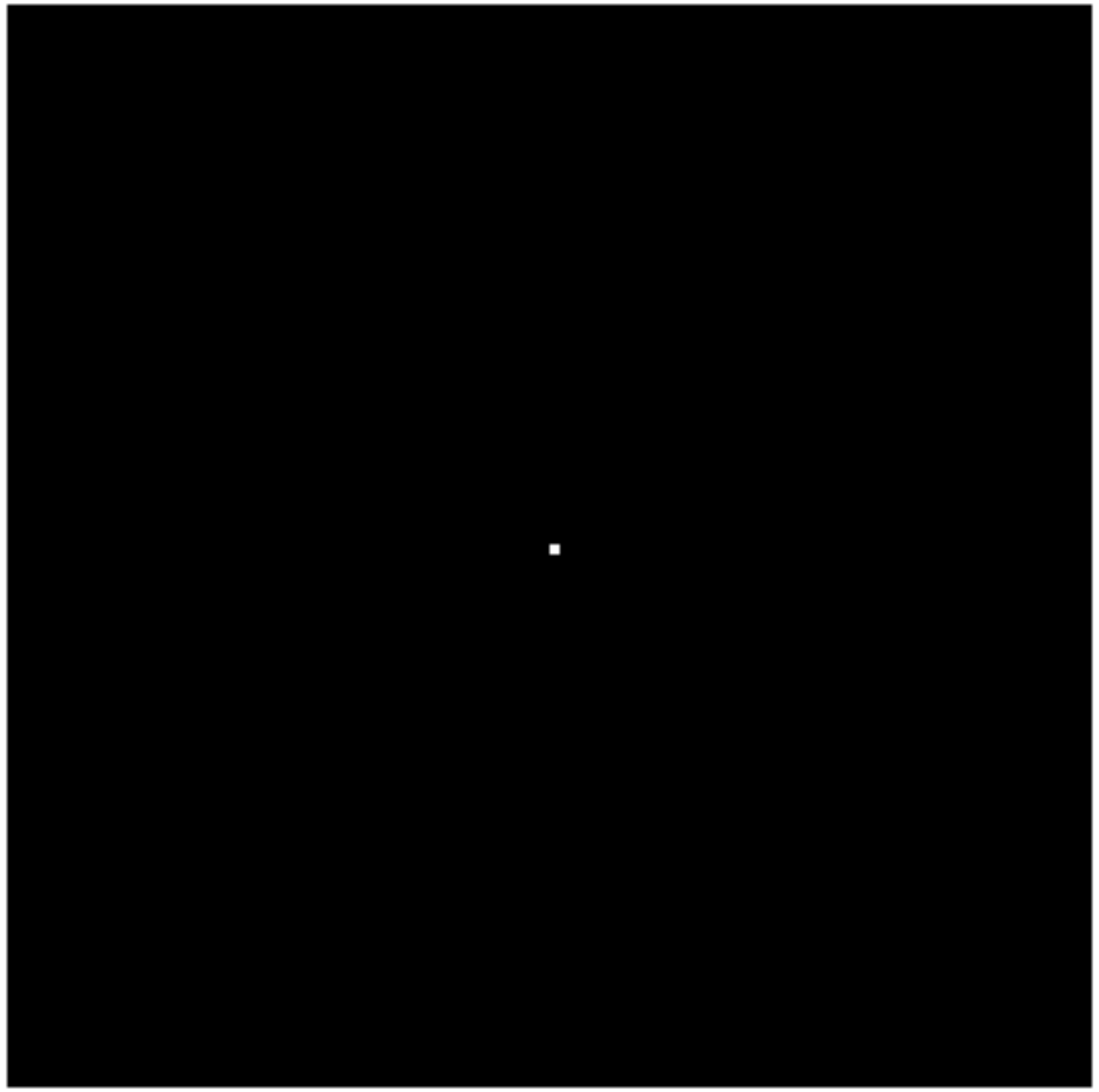
Image



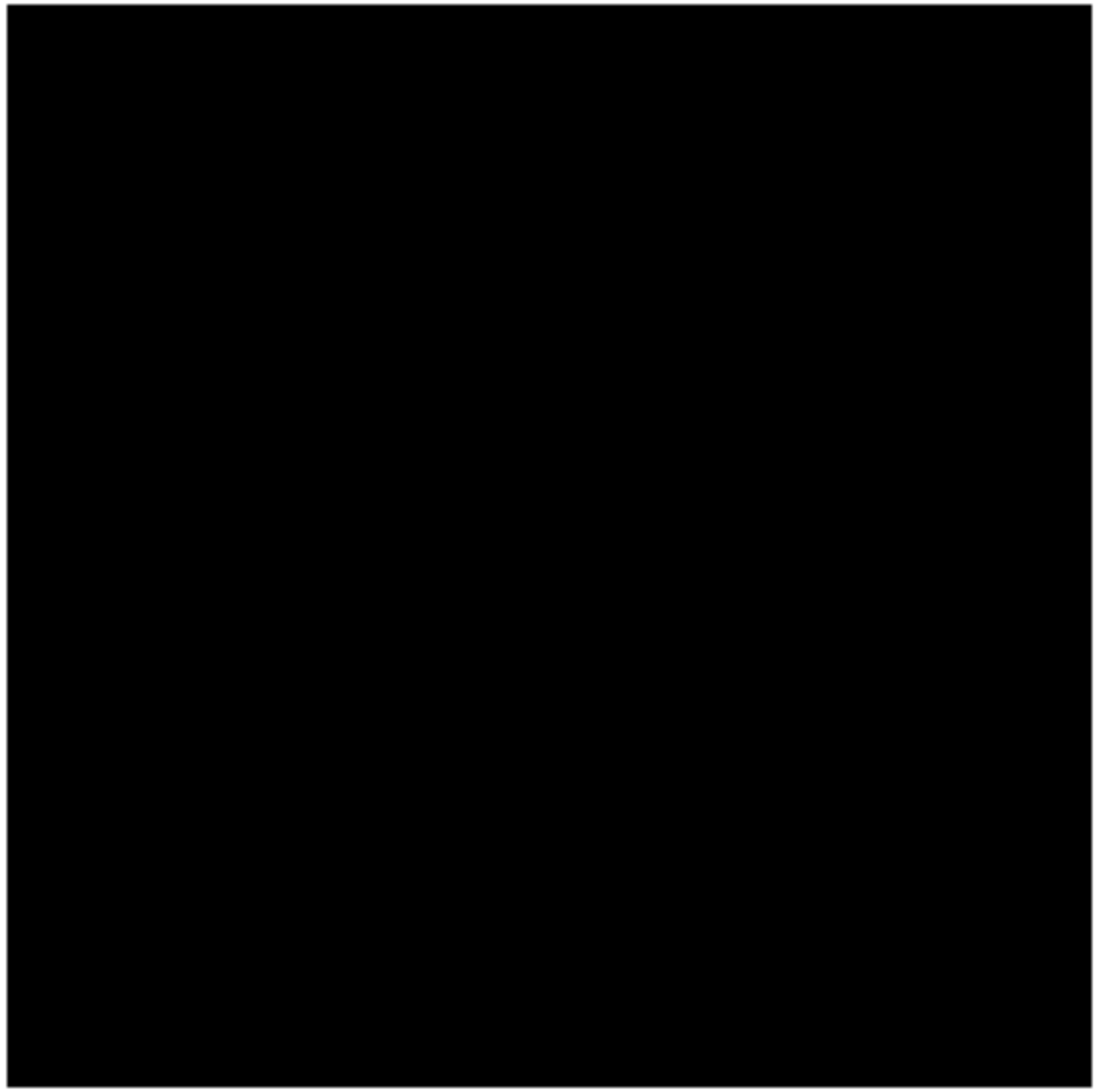
Source: D. Hoiem

Changements en fréquence

Transformée de Fourier



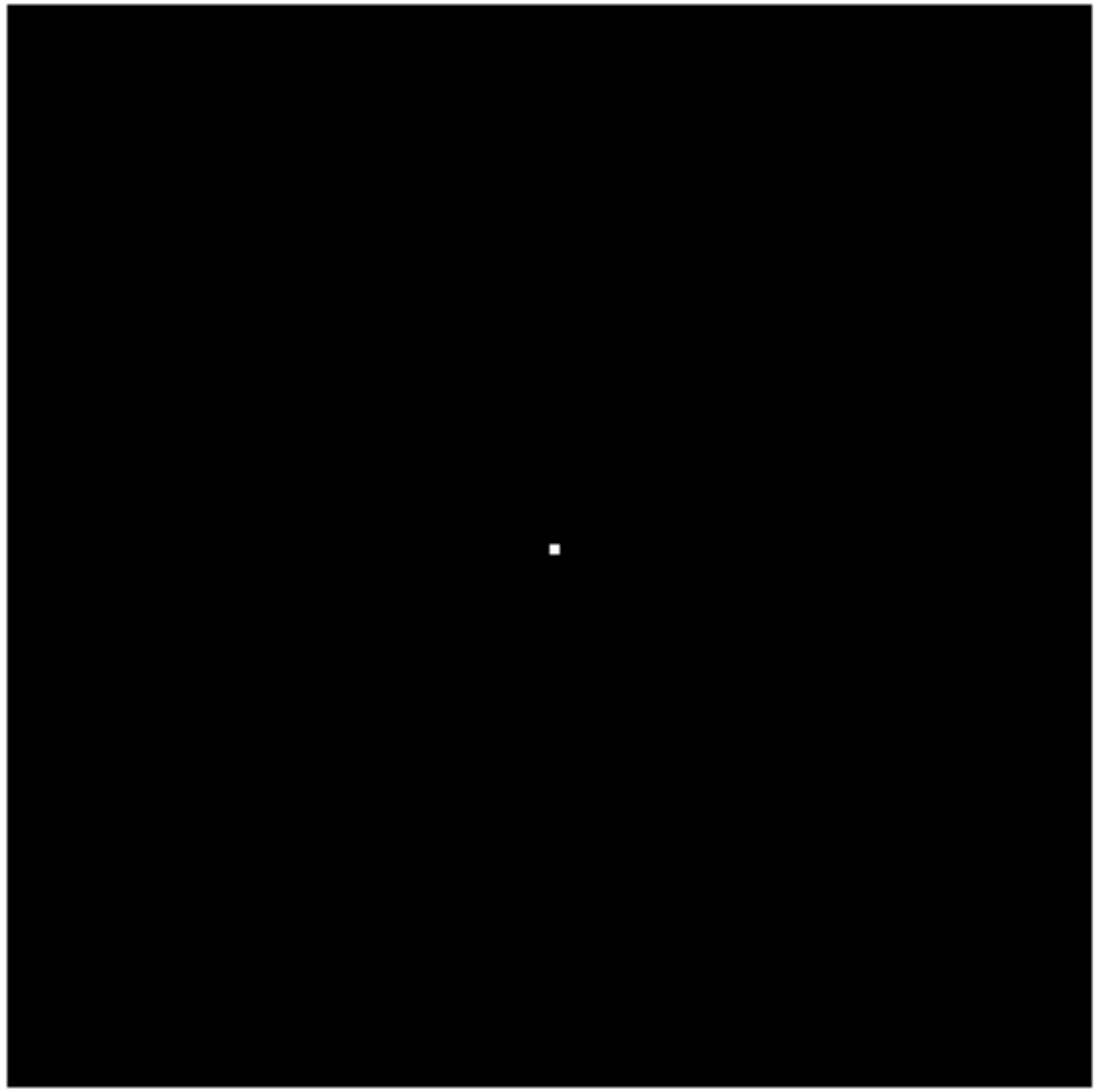
Image



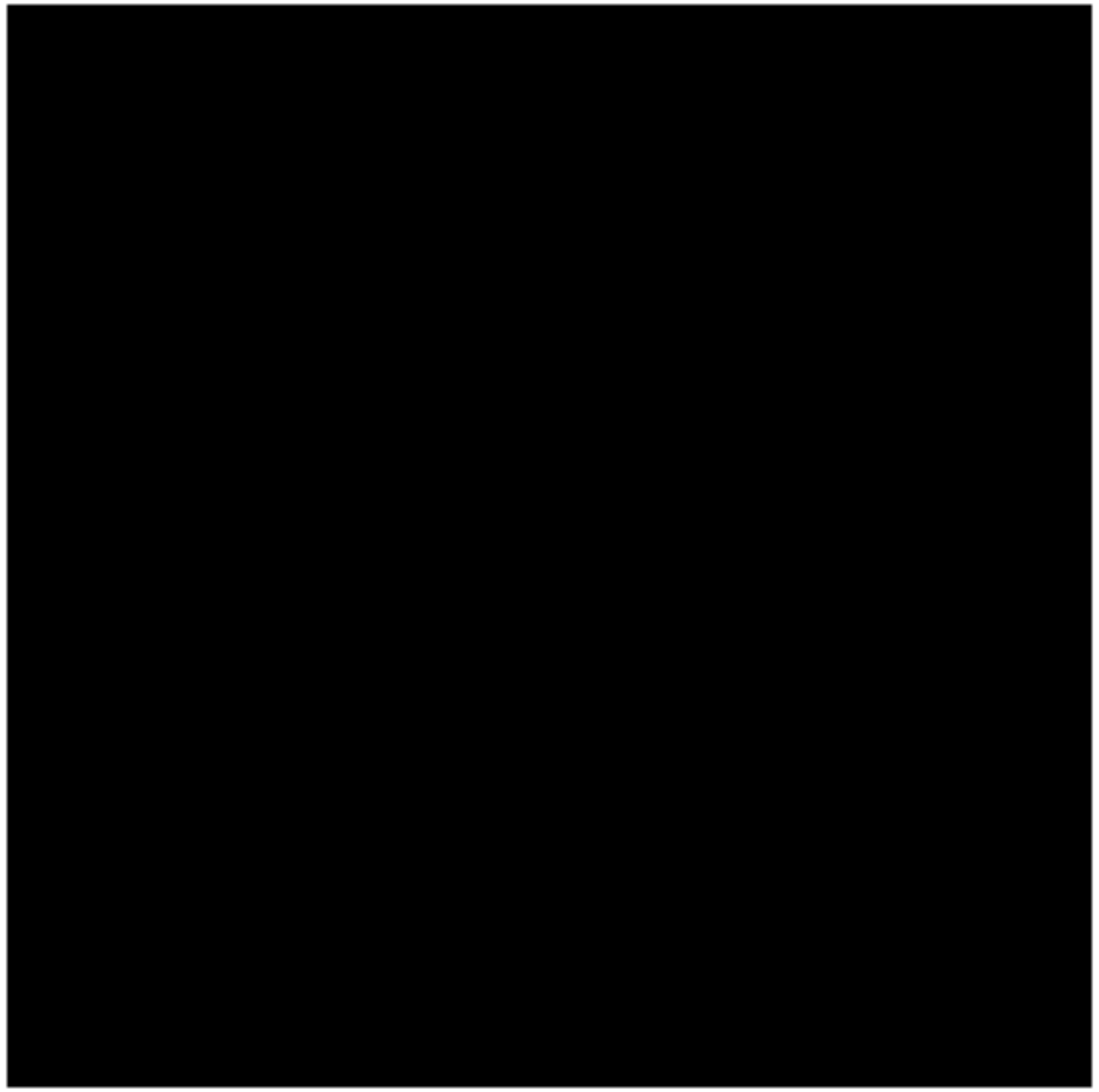
Source: D. Hoiem

Changements en fréquence

Transformée de Fourier



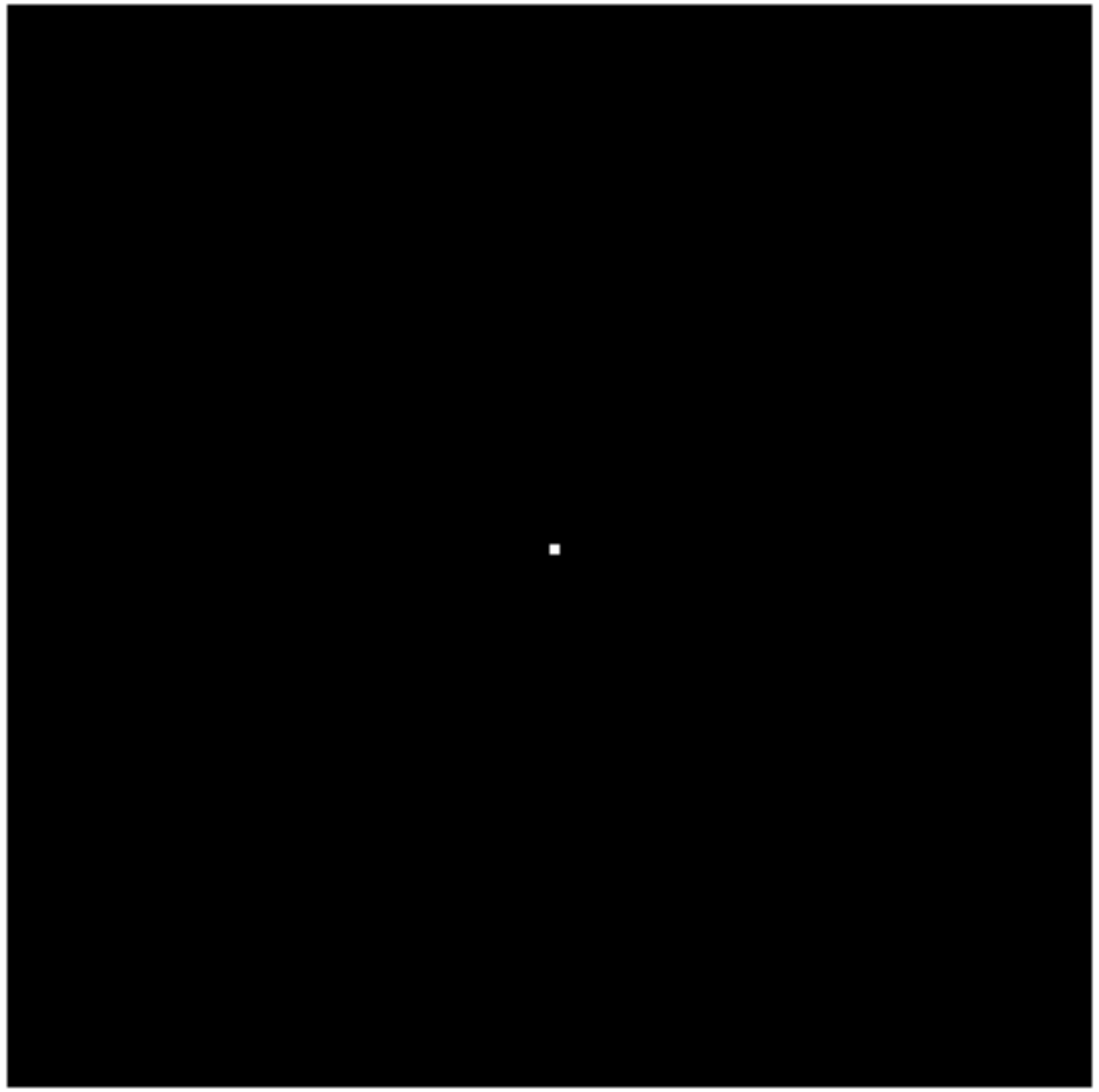
Image



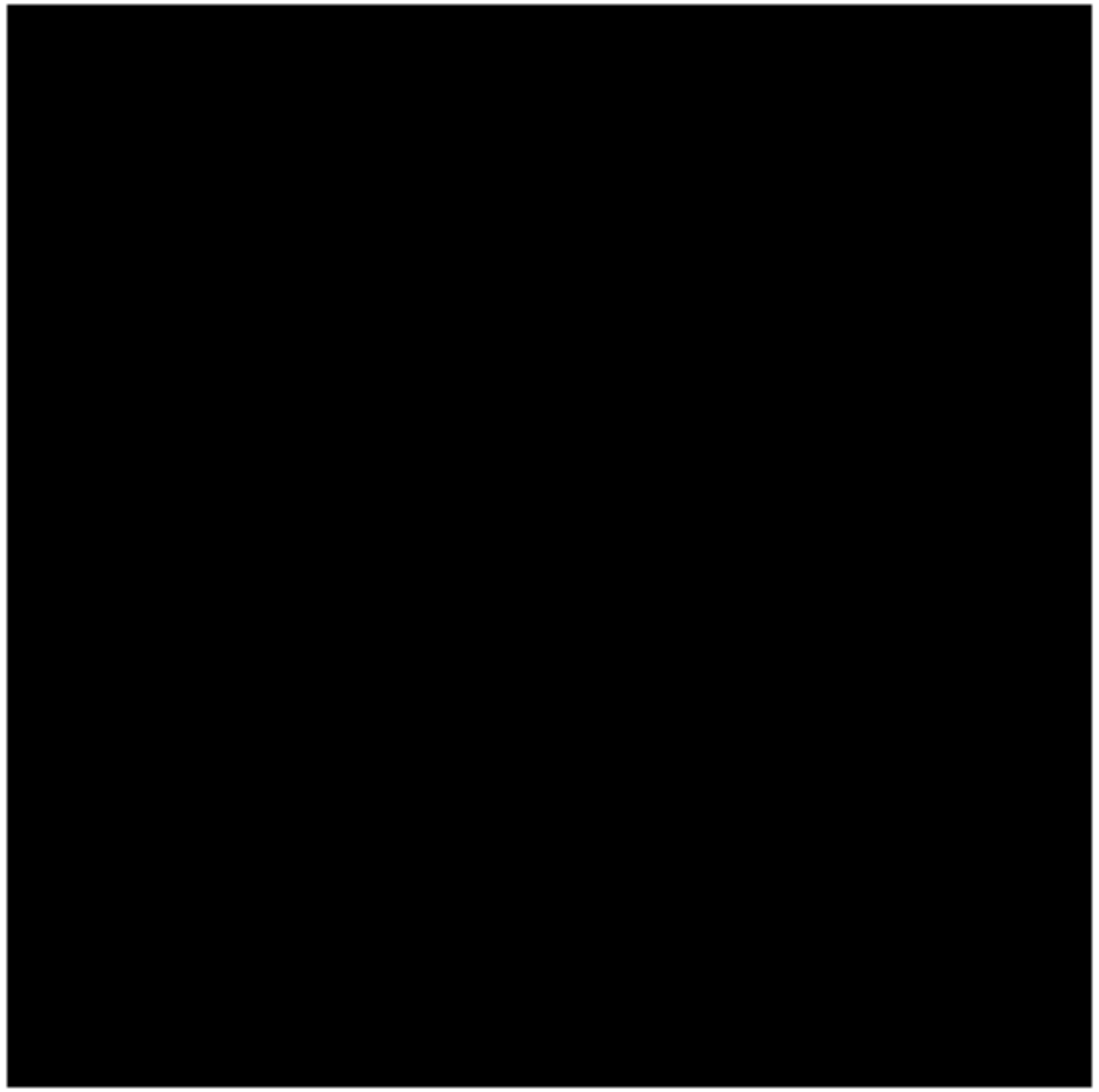
Source: D. Hoiem

Changements en fréquence

Transformée de Fourier



Image



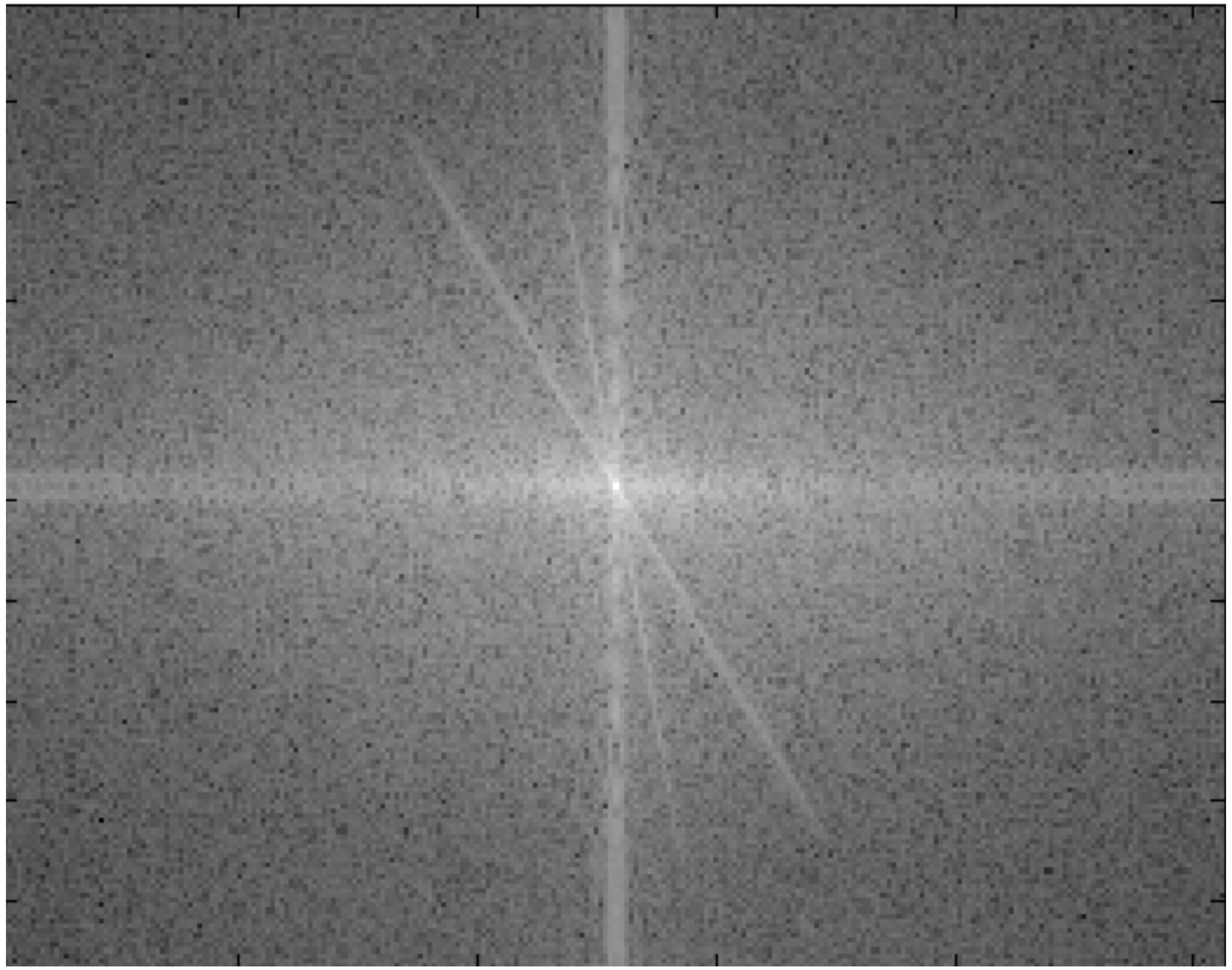
Source: D. Hoiem

En python

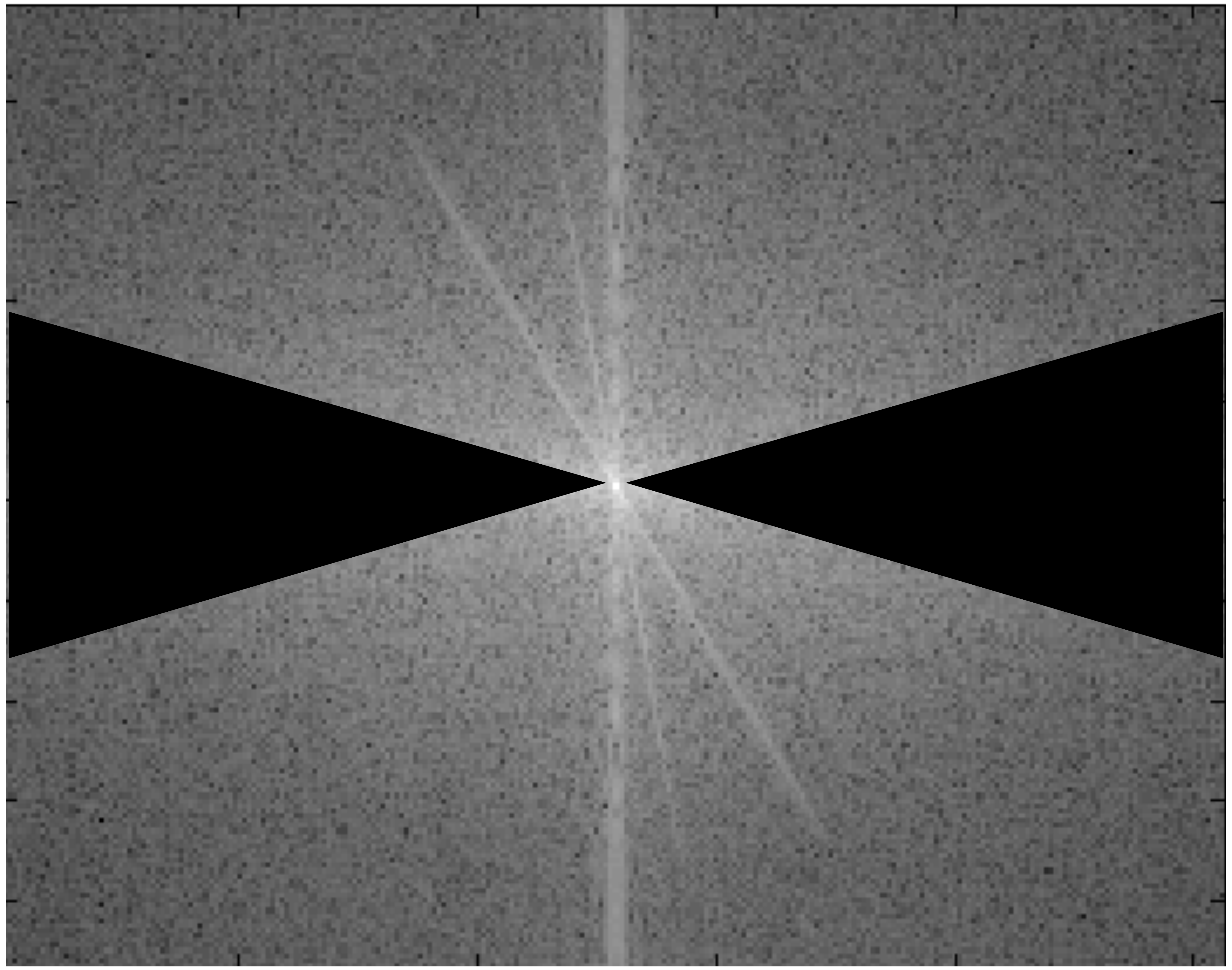
```python
from numpy.fft import fft2
fft = fft2(img)
```

Pour l'affichage :

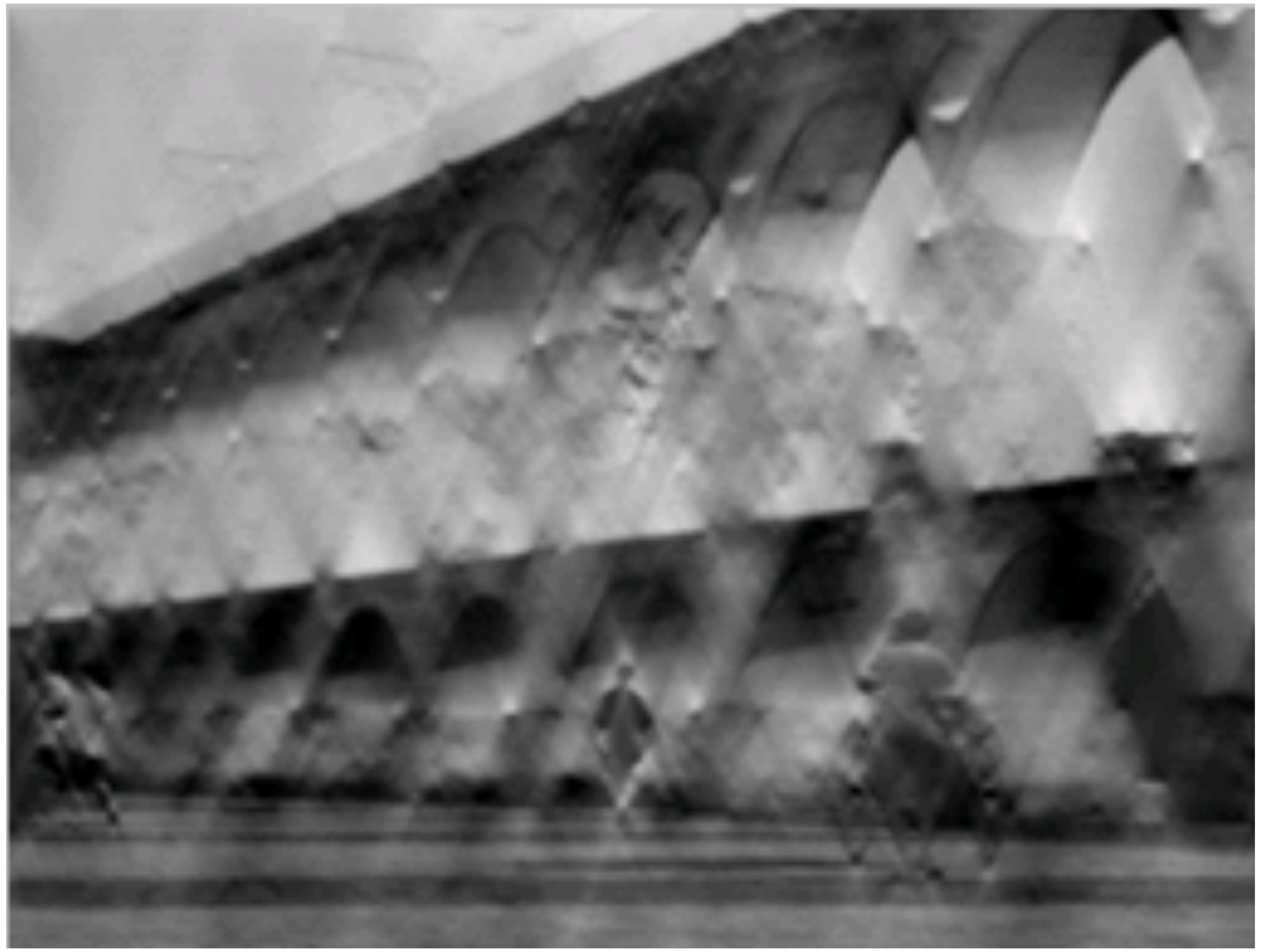
```python
import matplotlib.pyplot as plt
plt.imshow(np.log(np.abs(np.fft.fftshift(fil_fft))))
```



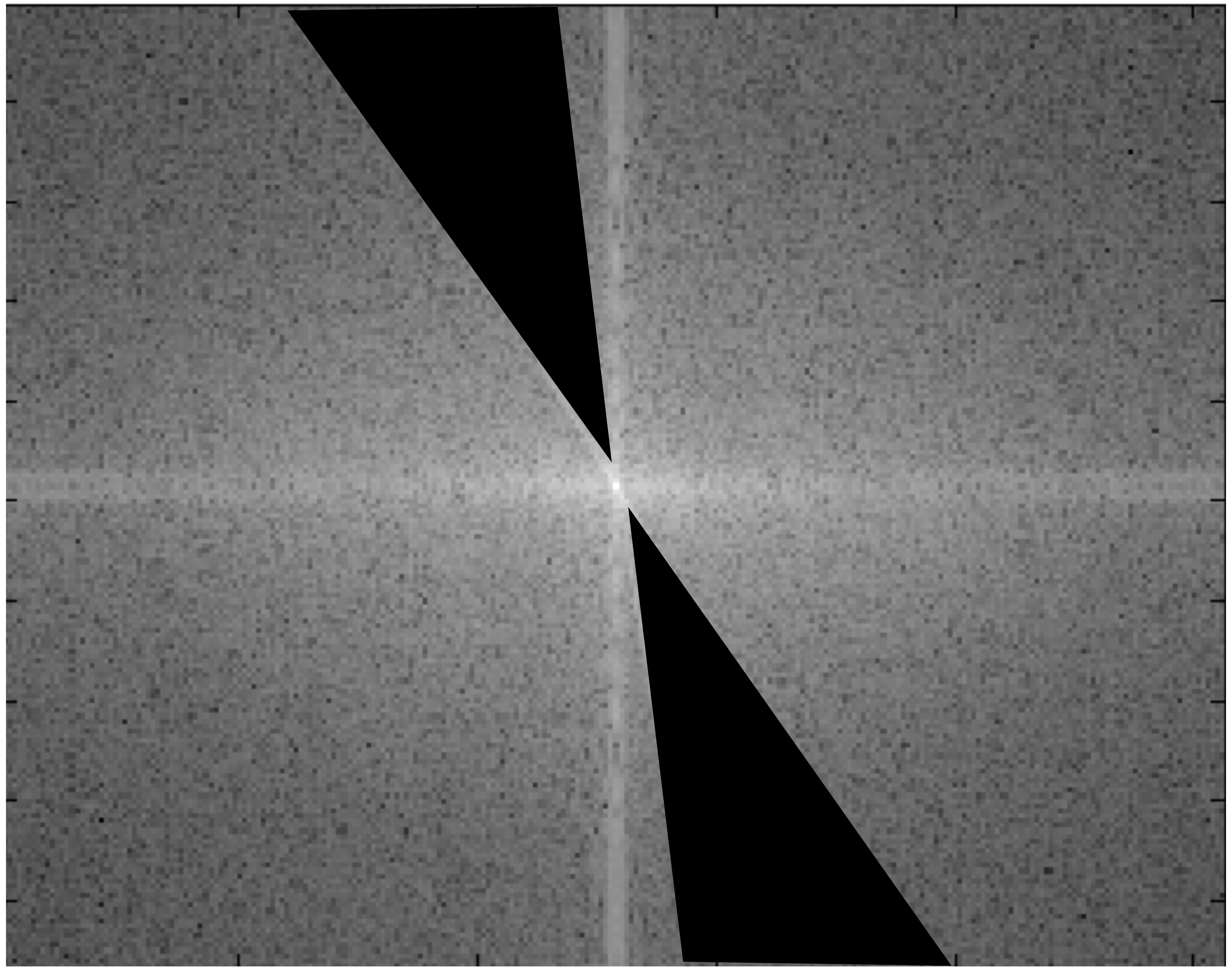
Manipulons la FFT



FFT inverse

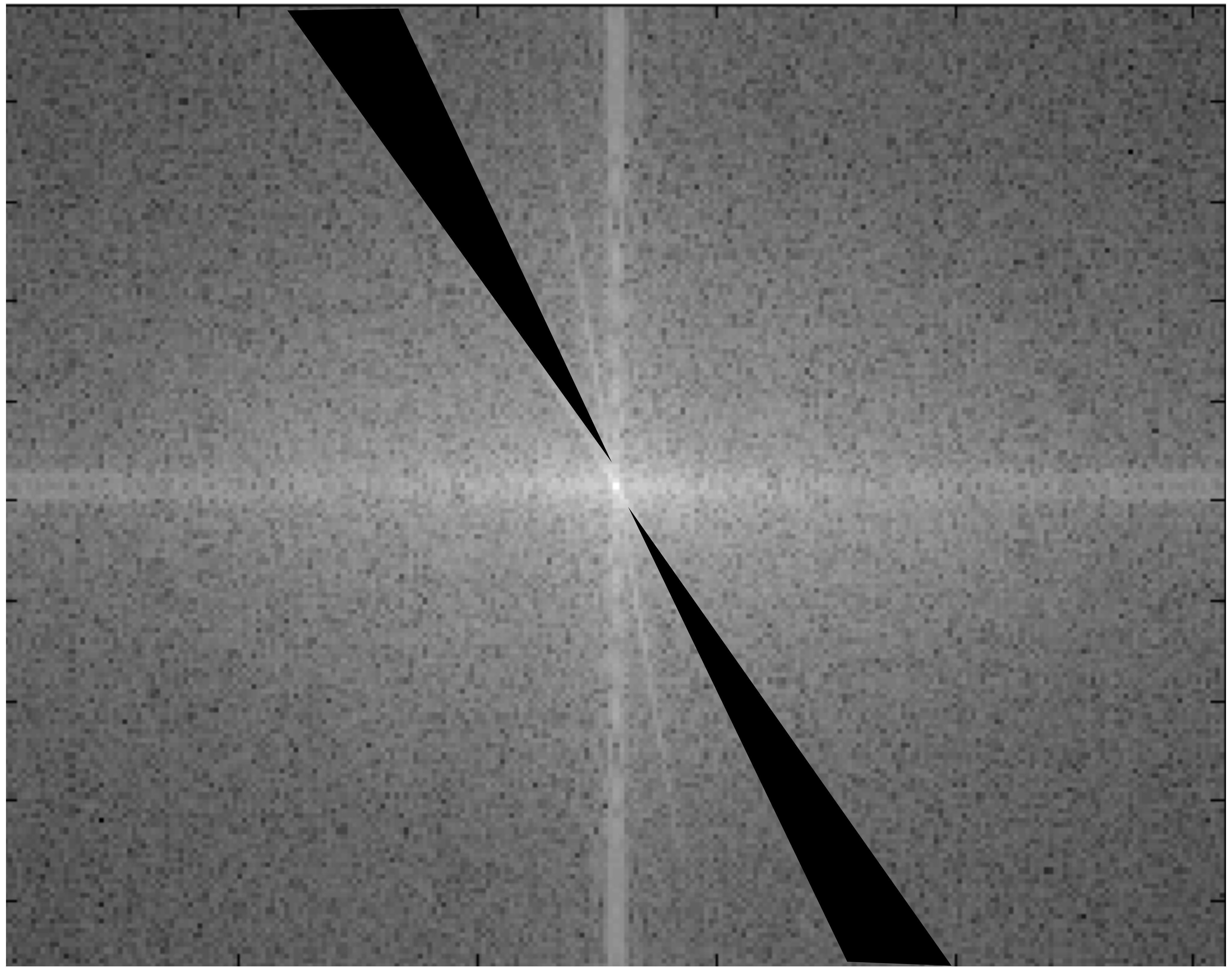


Manipulons la FFT



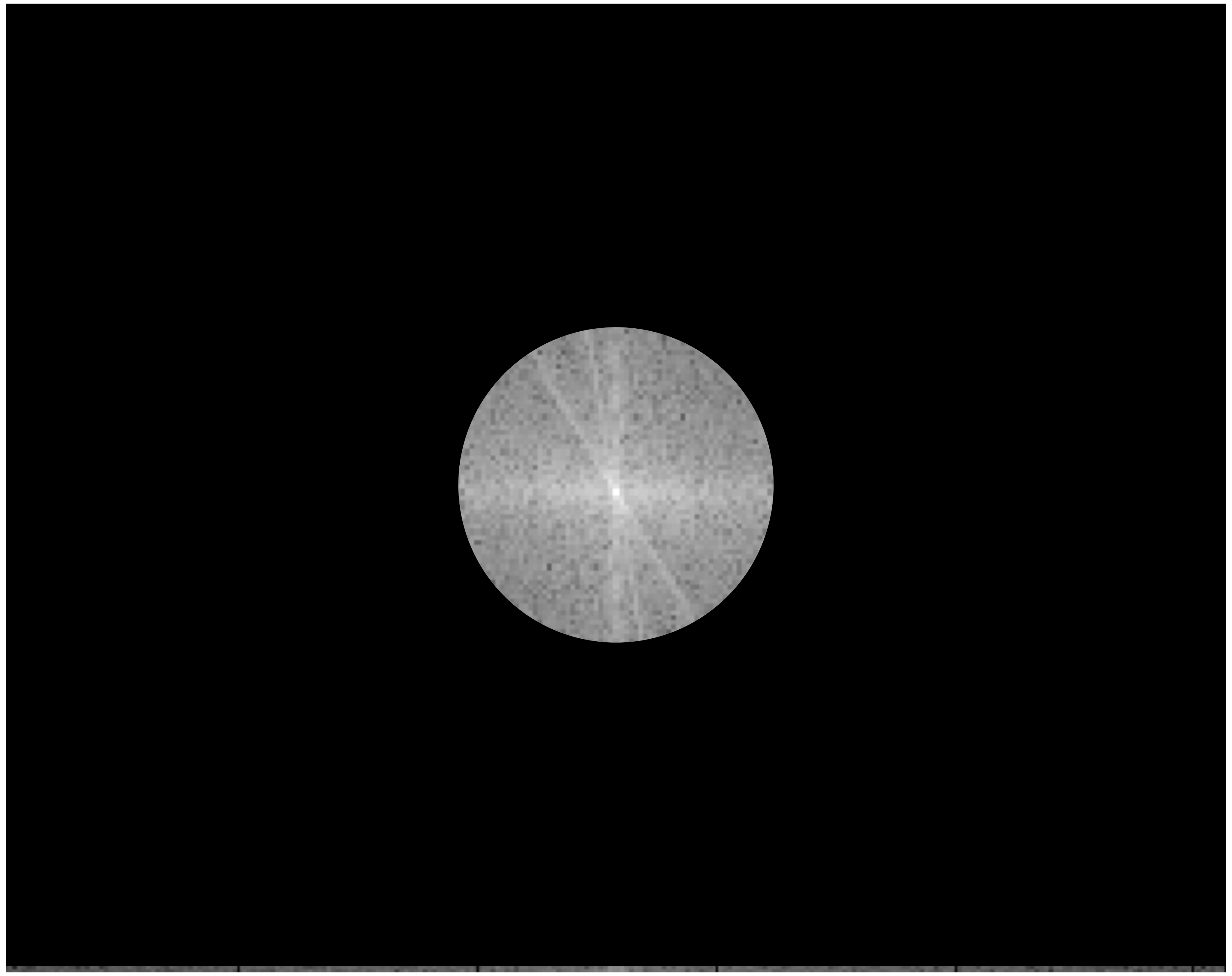
FFT inverse →

Manipulons la FFT



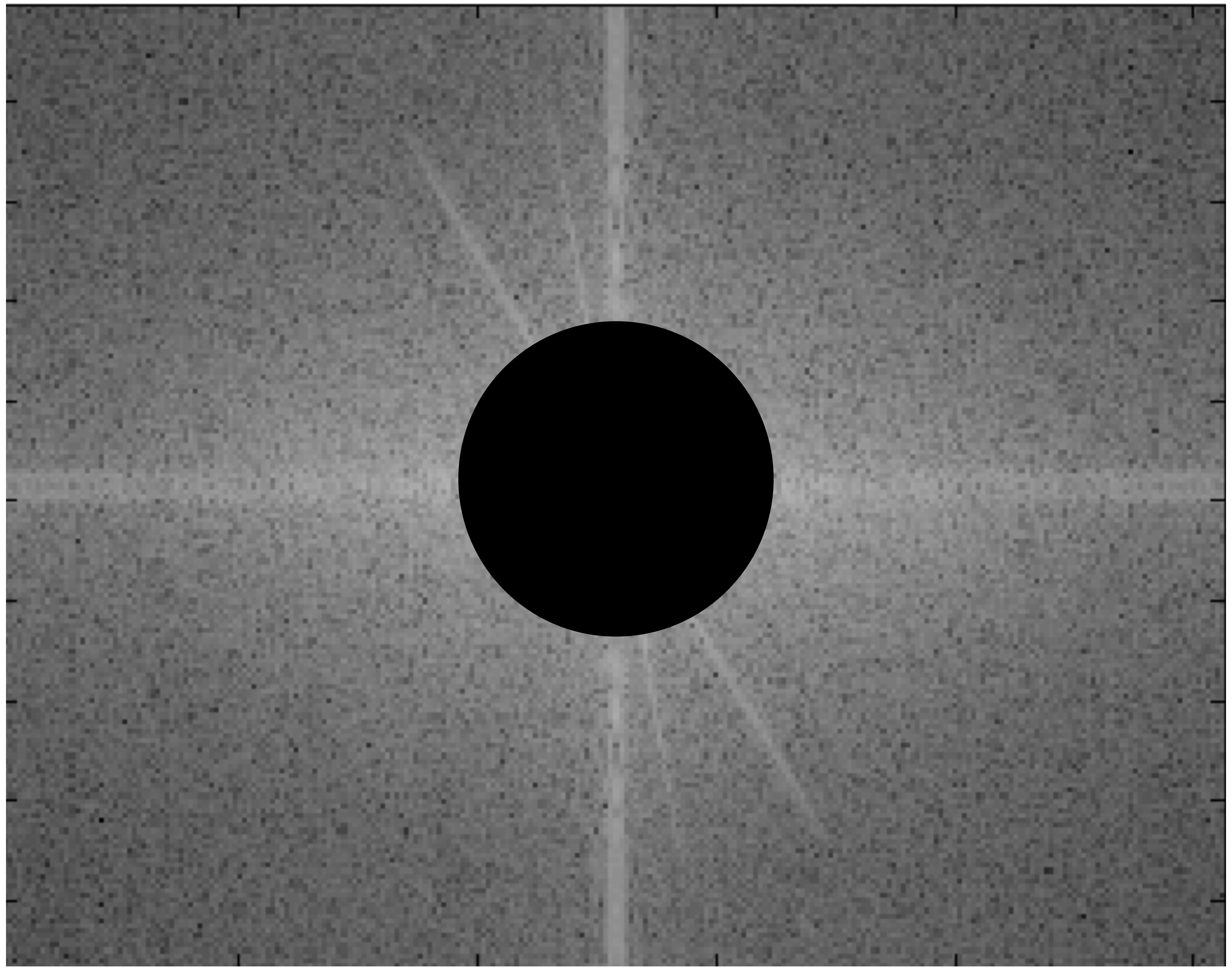
FFT inverse

Manipulons la FFT

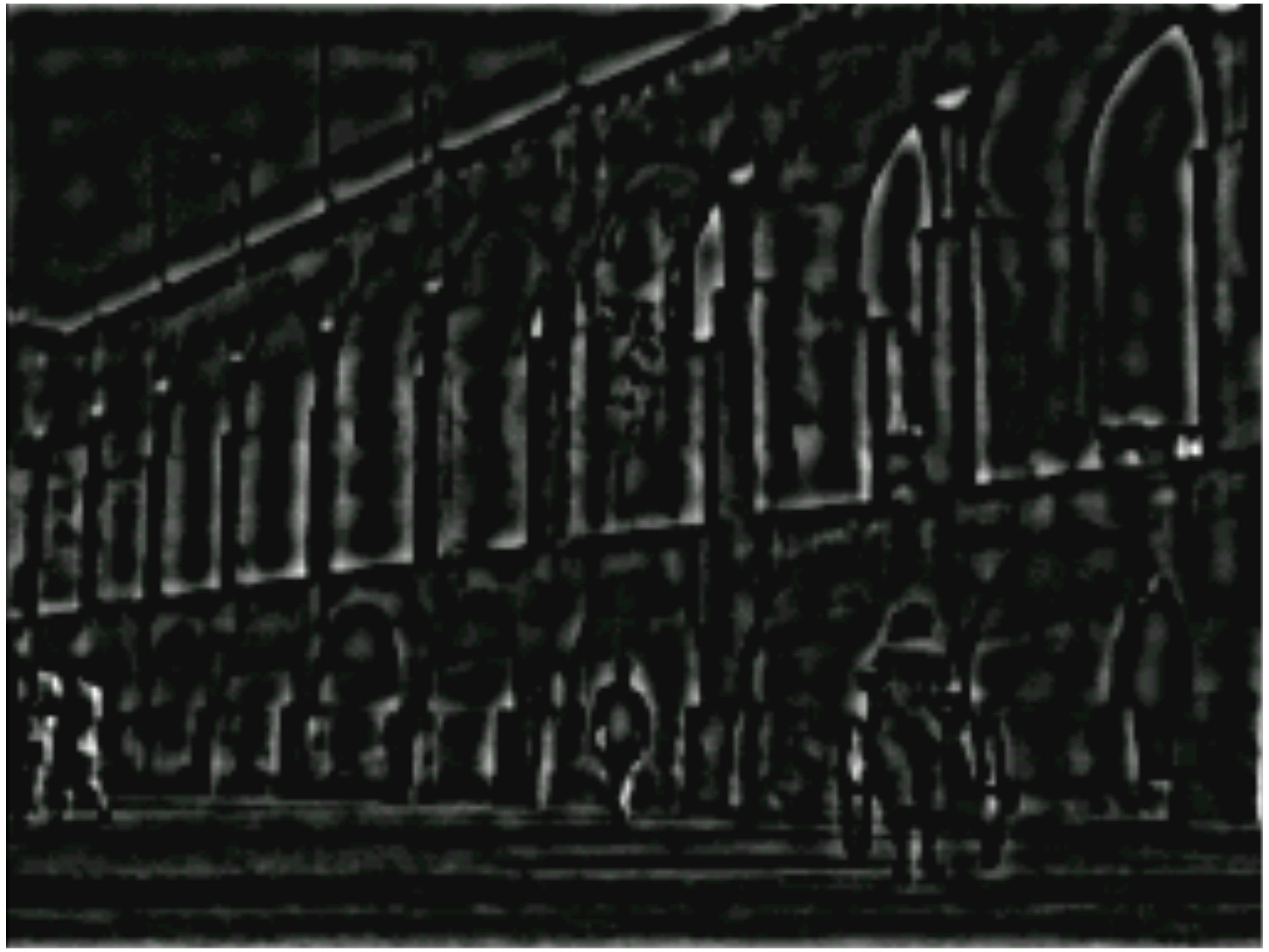


FFT inverse

Manipulons la FFT



FFT inverse



Le théorème de la convolution

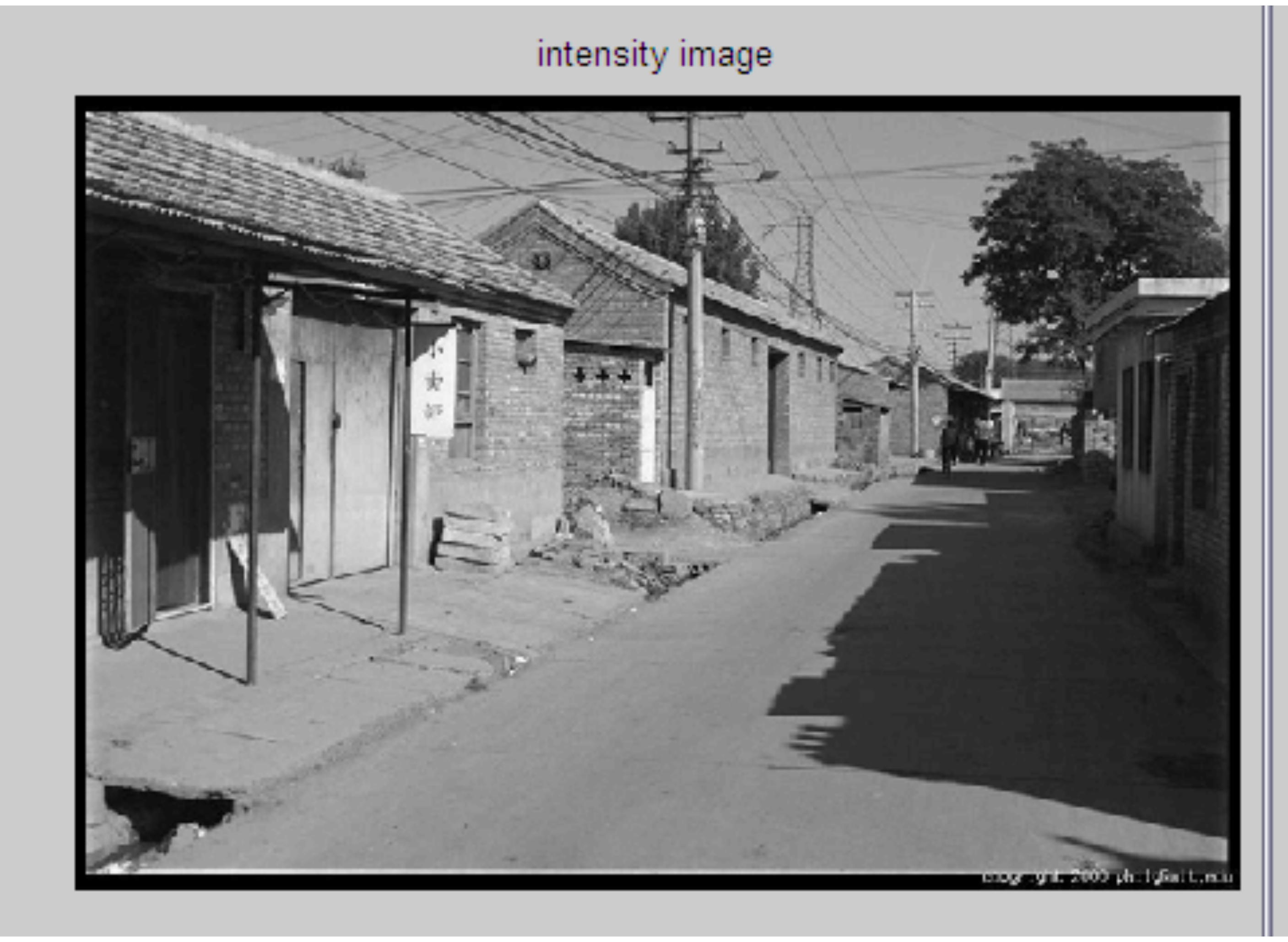
- La transformée de Fourier d'une convolution de deux fonctions est le produit de leur transformée de Fourier

$$F(g * h) = F(g)F(h)$$

- En français : une **convolution** dans le domaine spatial est équivalent à une **multiplication** dans le domaine spectral

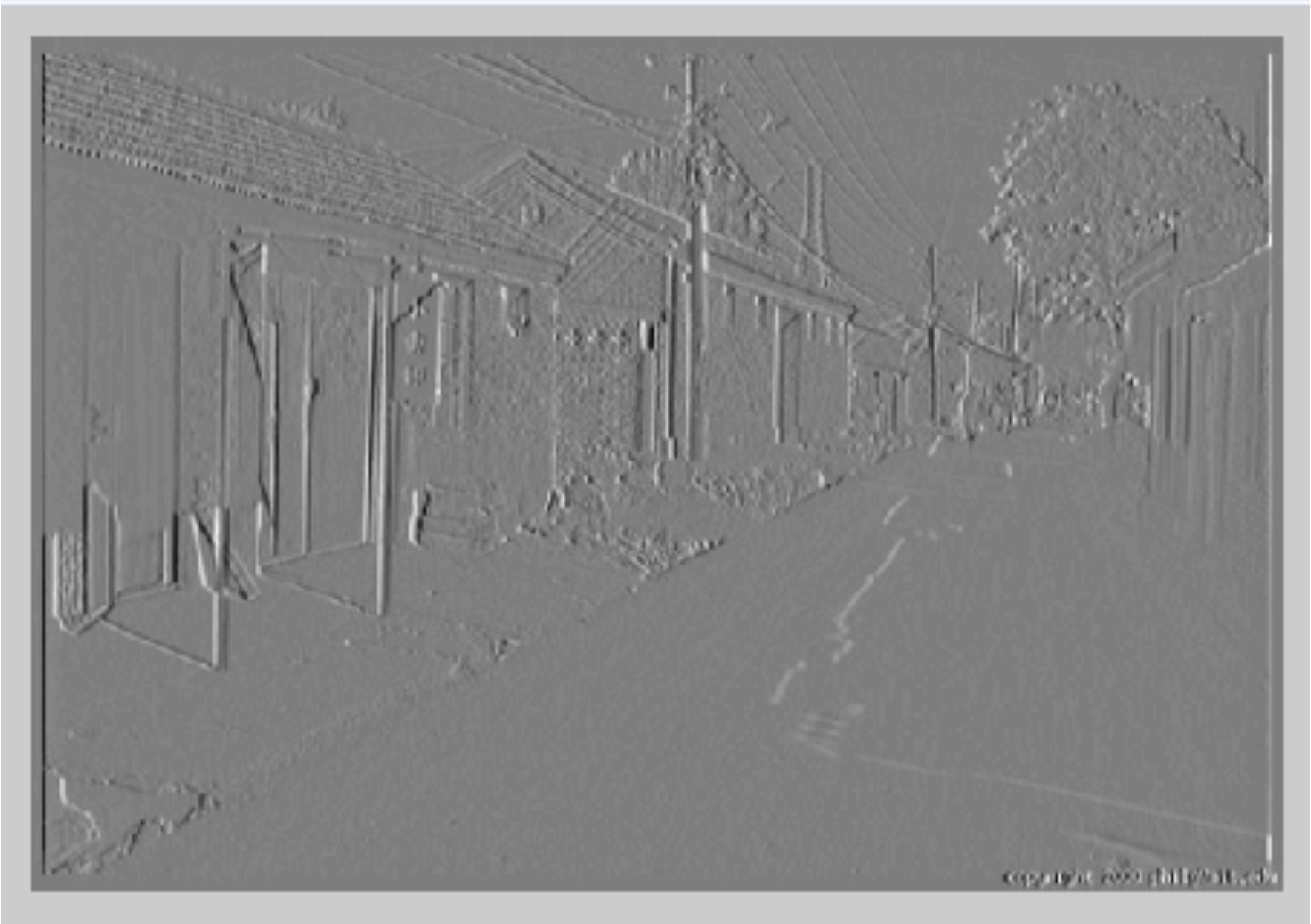
Filtrage spatial

1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1



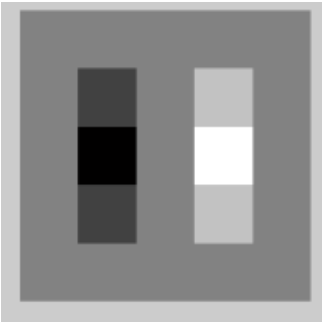
*

=

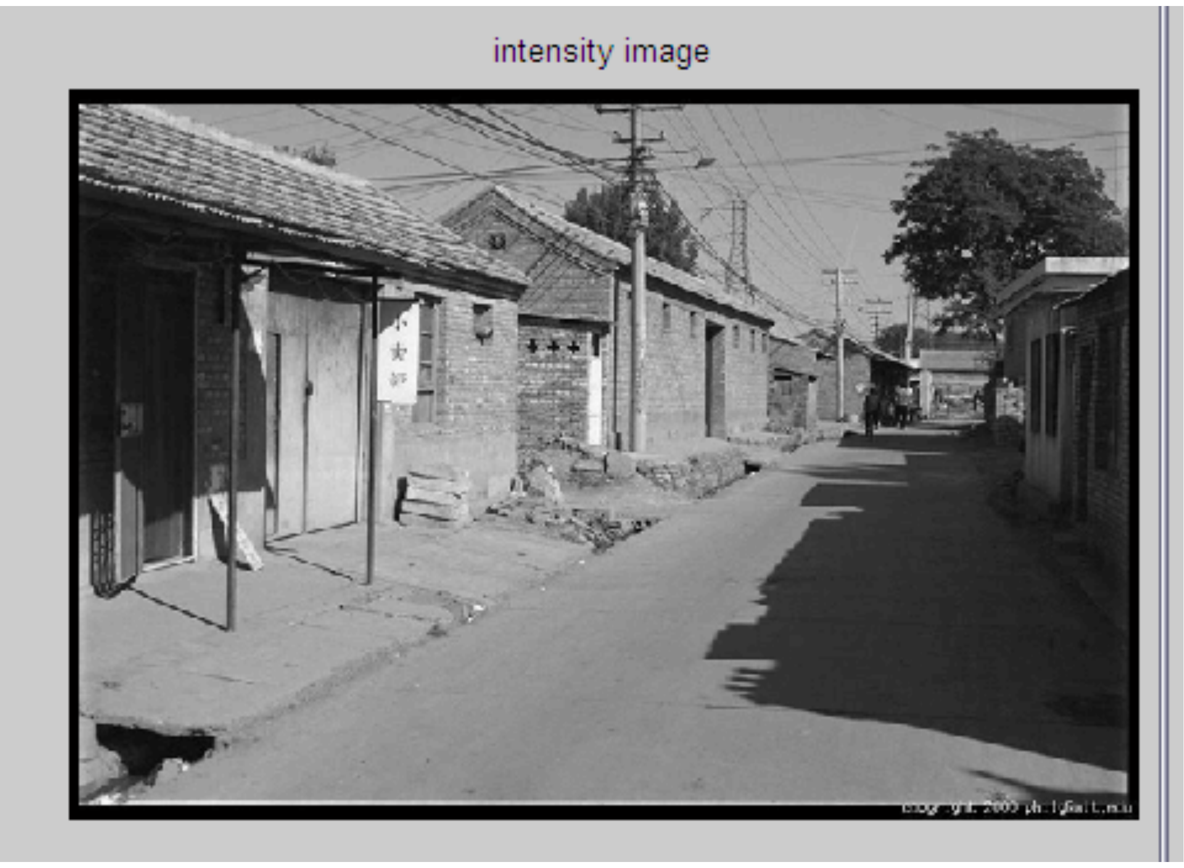


Filtrage spectral

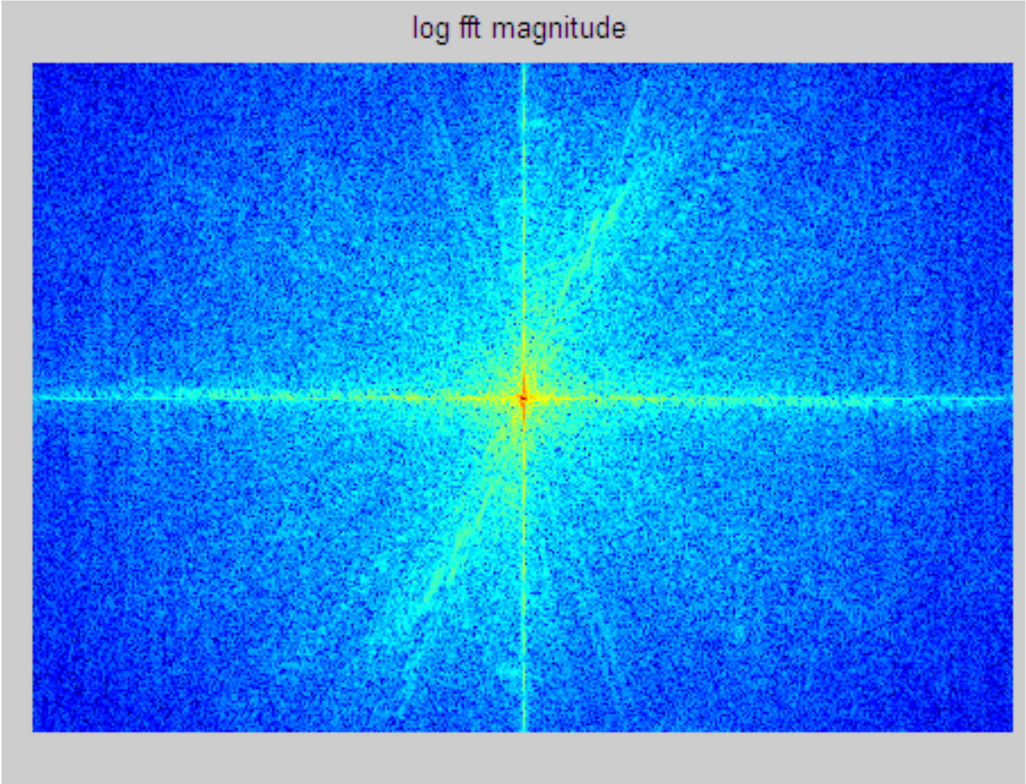
Complexité?



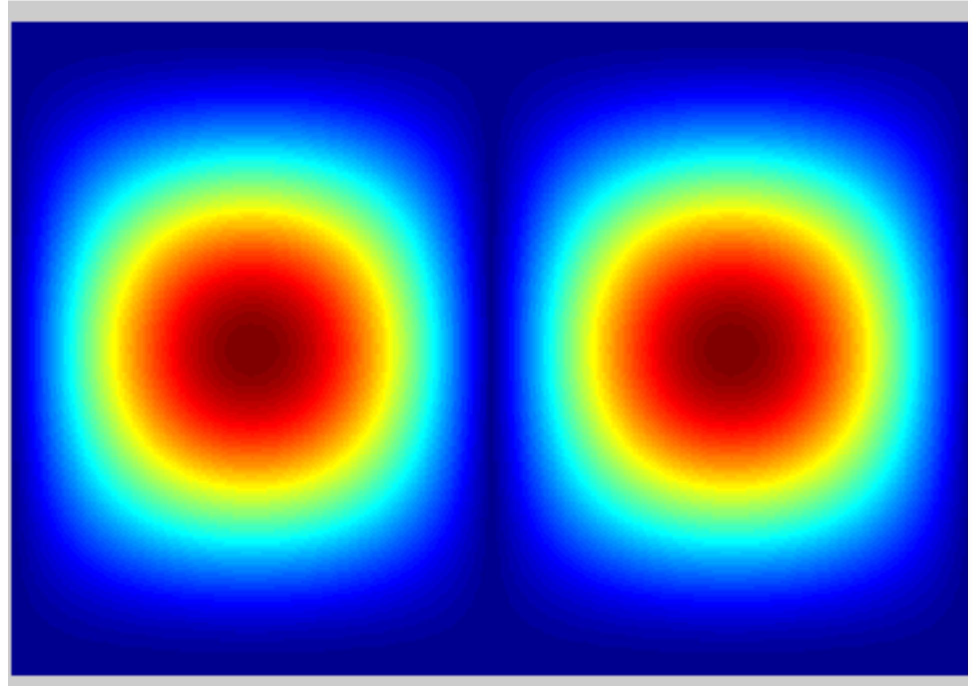
FFT

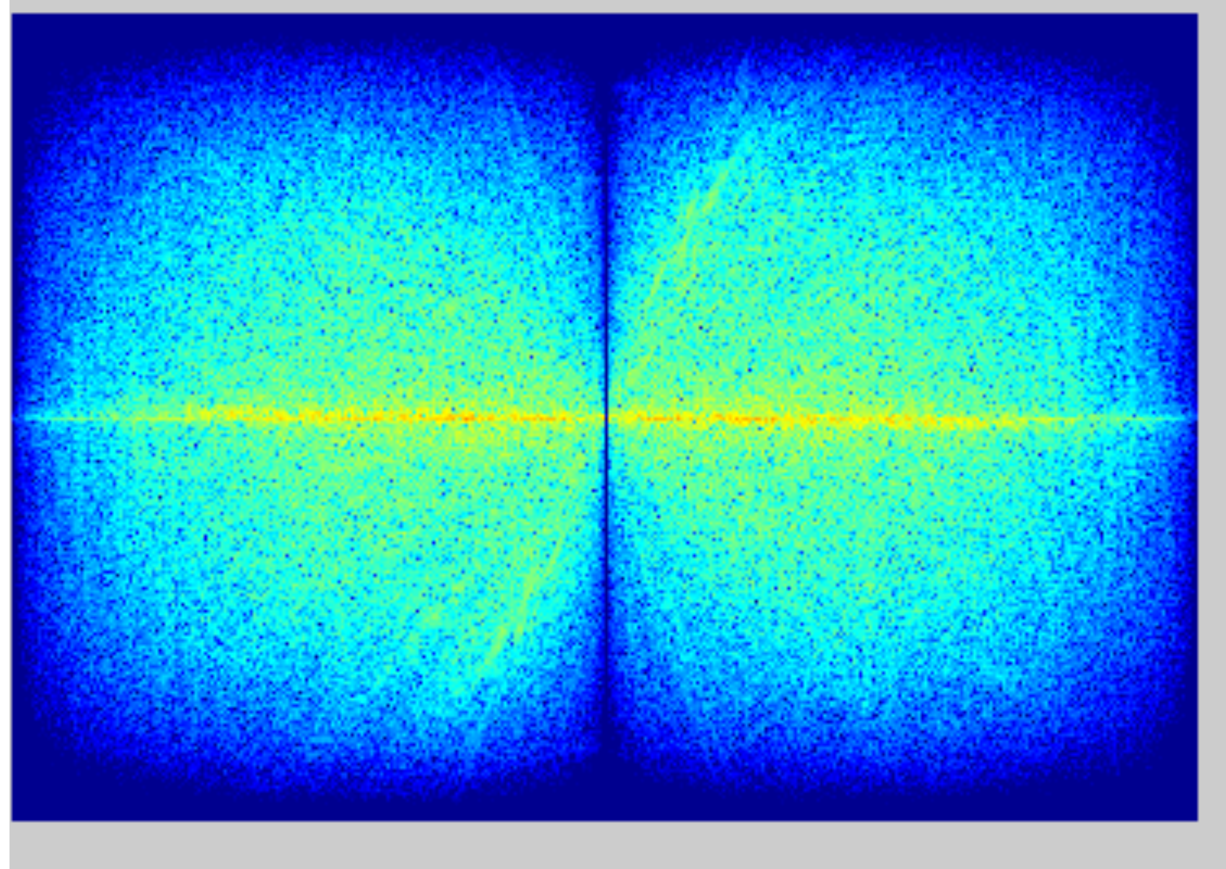


FFT

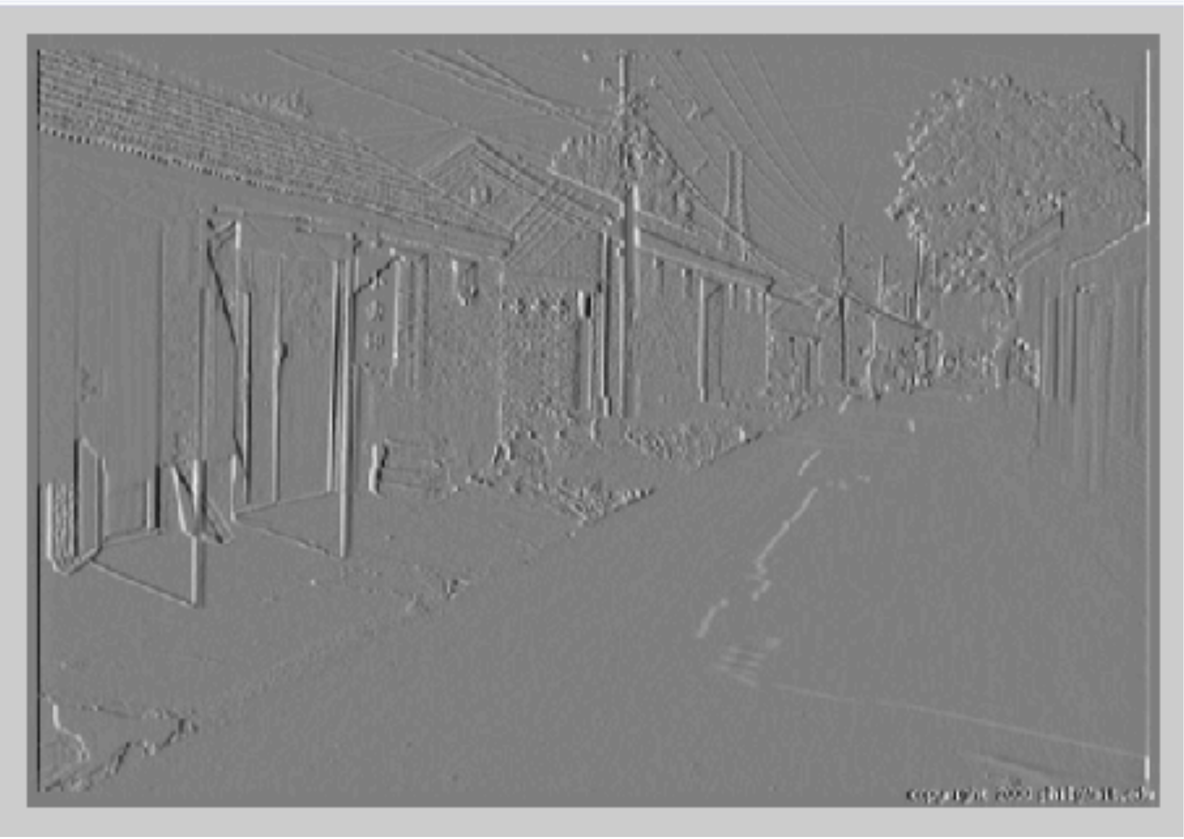


x

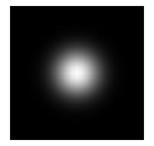


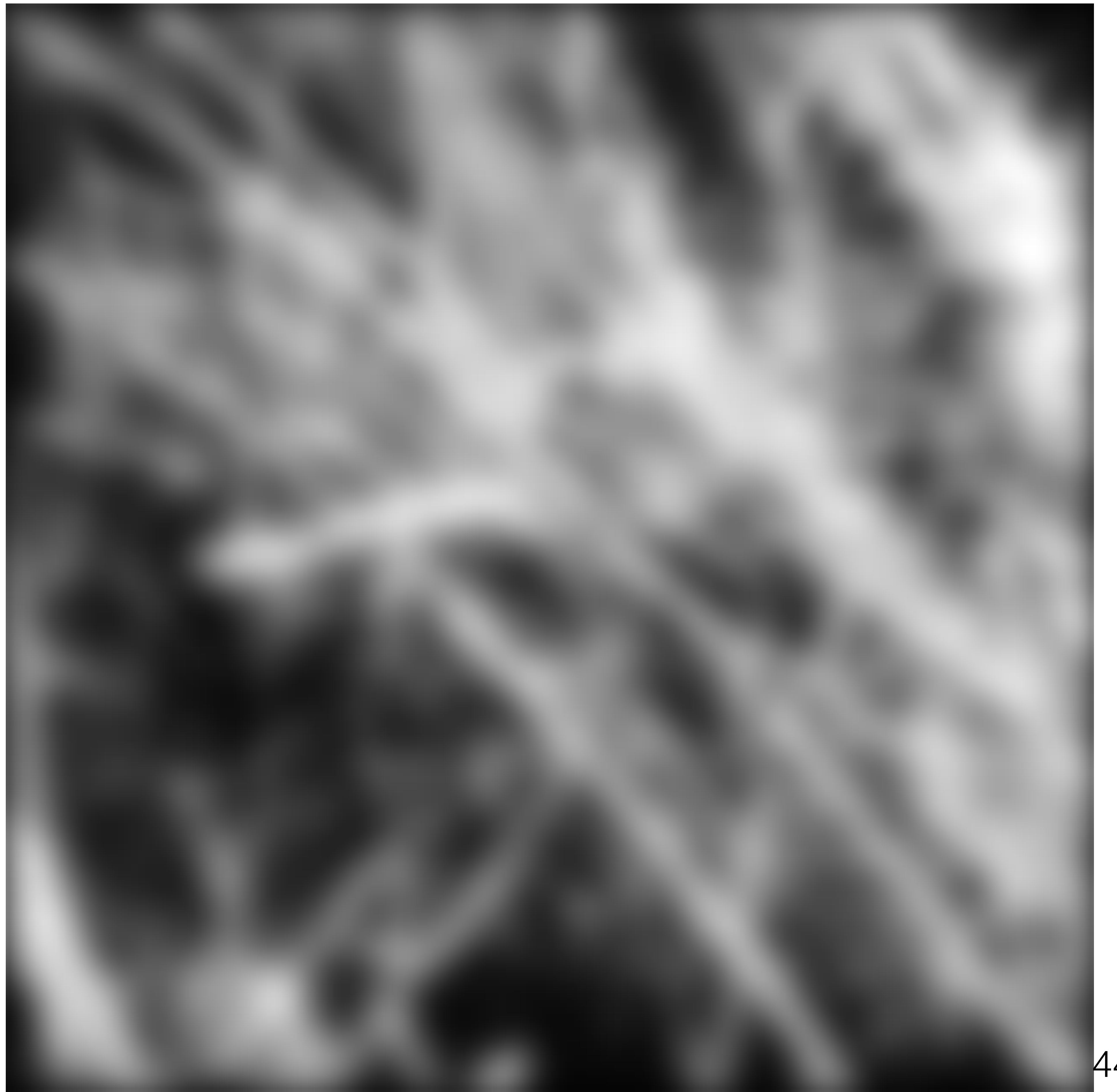


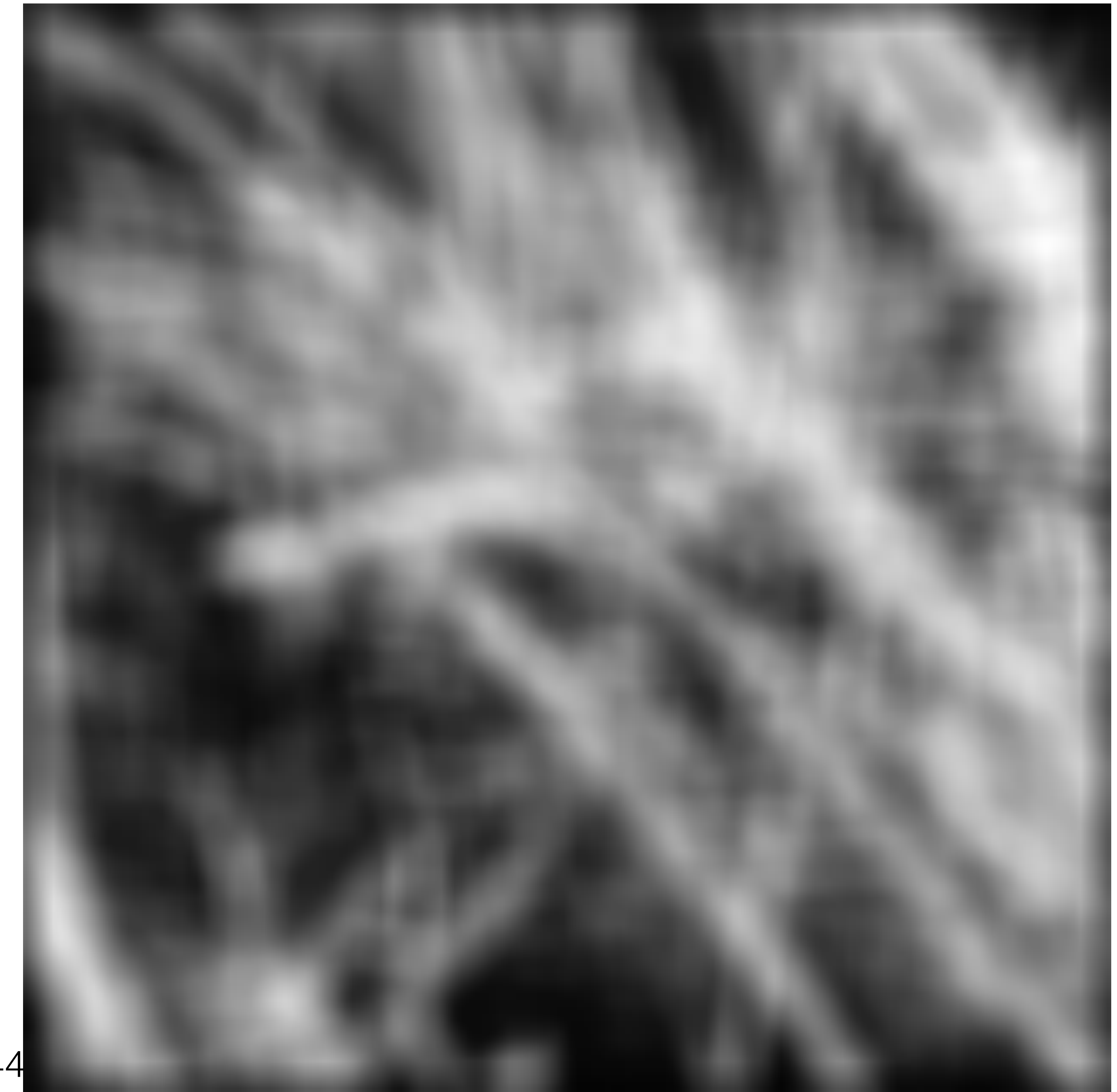
FFT inverse



Pourquoi le filtre gaussien nous donne une image lisse,
mais pas le filtre boîte?







Filtre gaussien

image

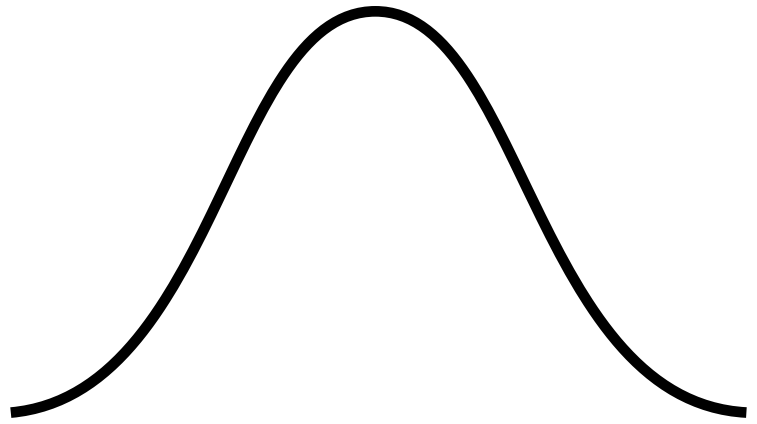
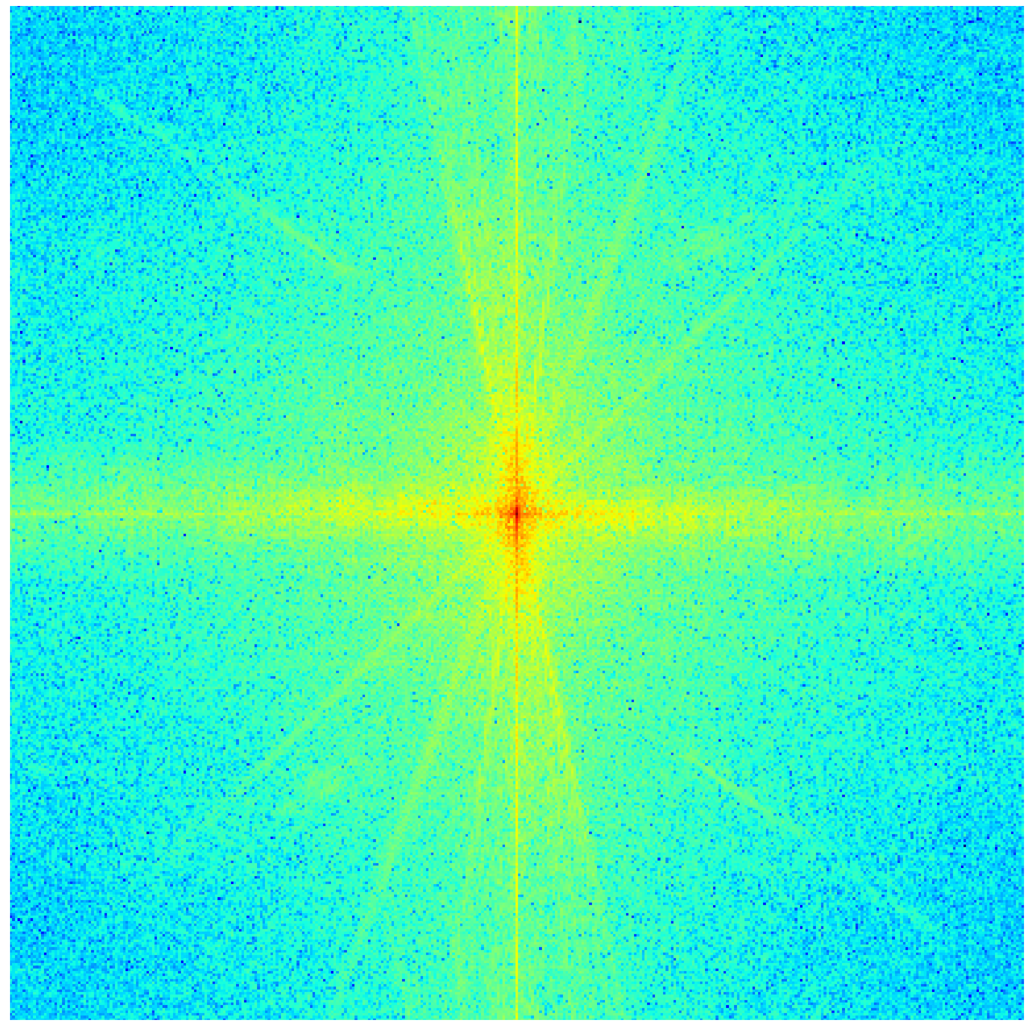
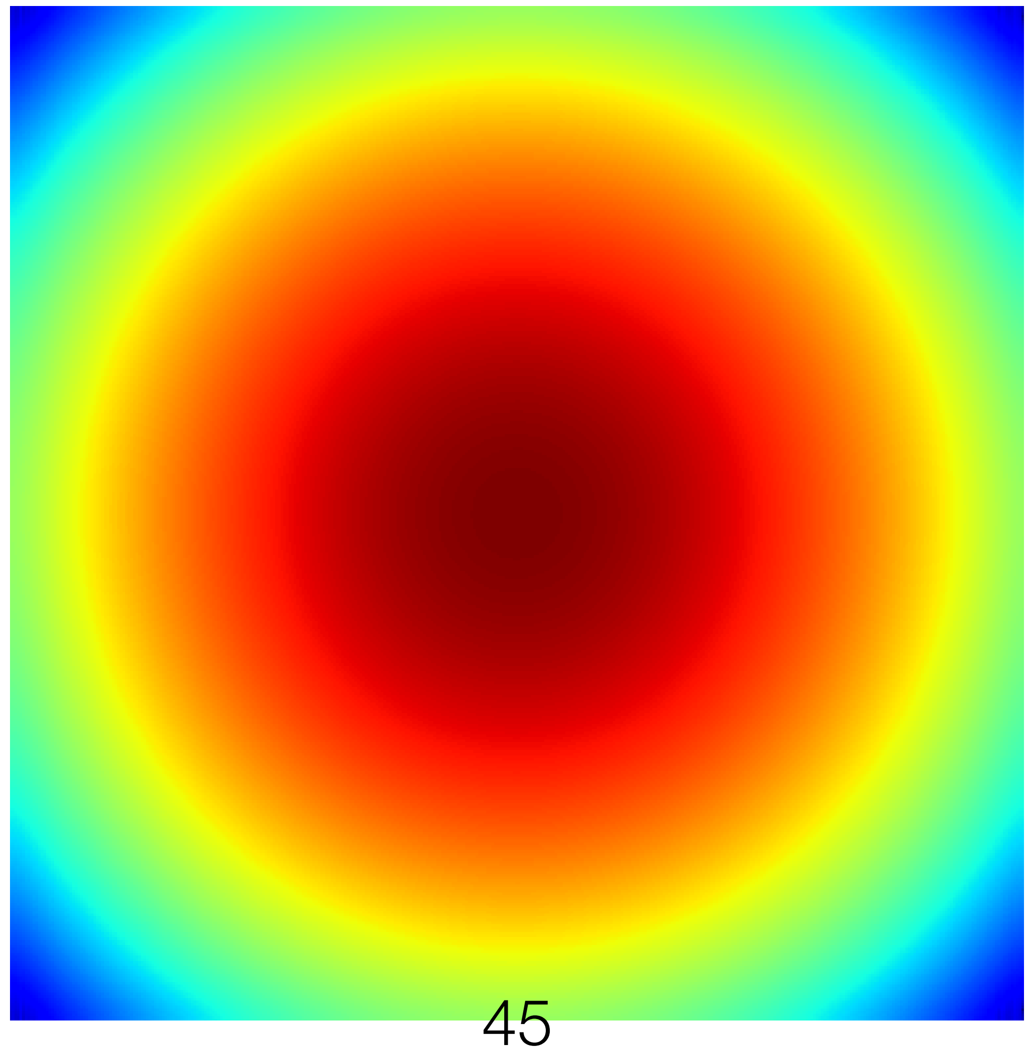


image filtrée

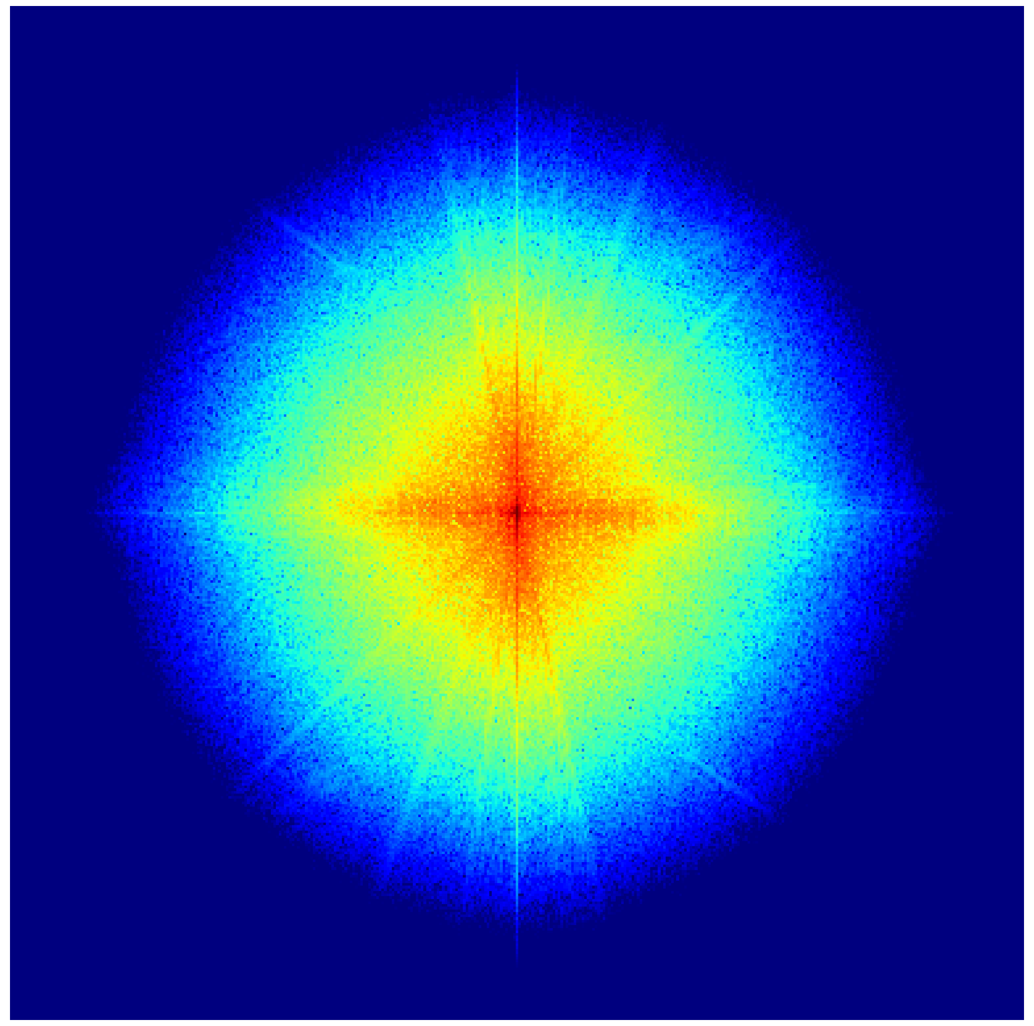
TF de l'image



TF du filtre



TF de l'image filtrée



Filtre « boîte »

image

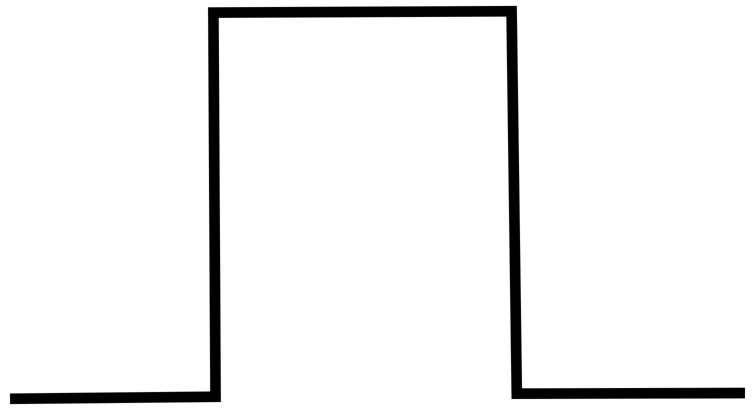
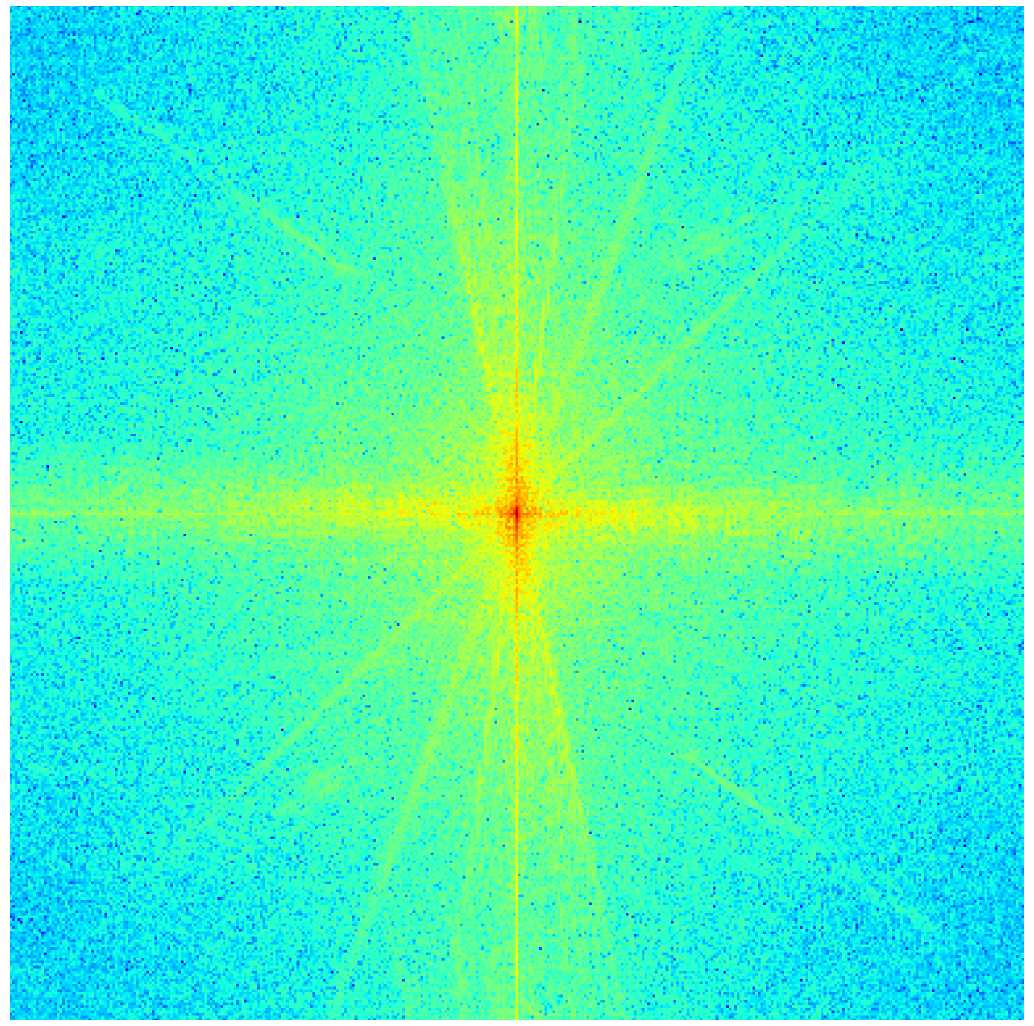
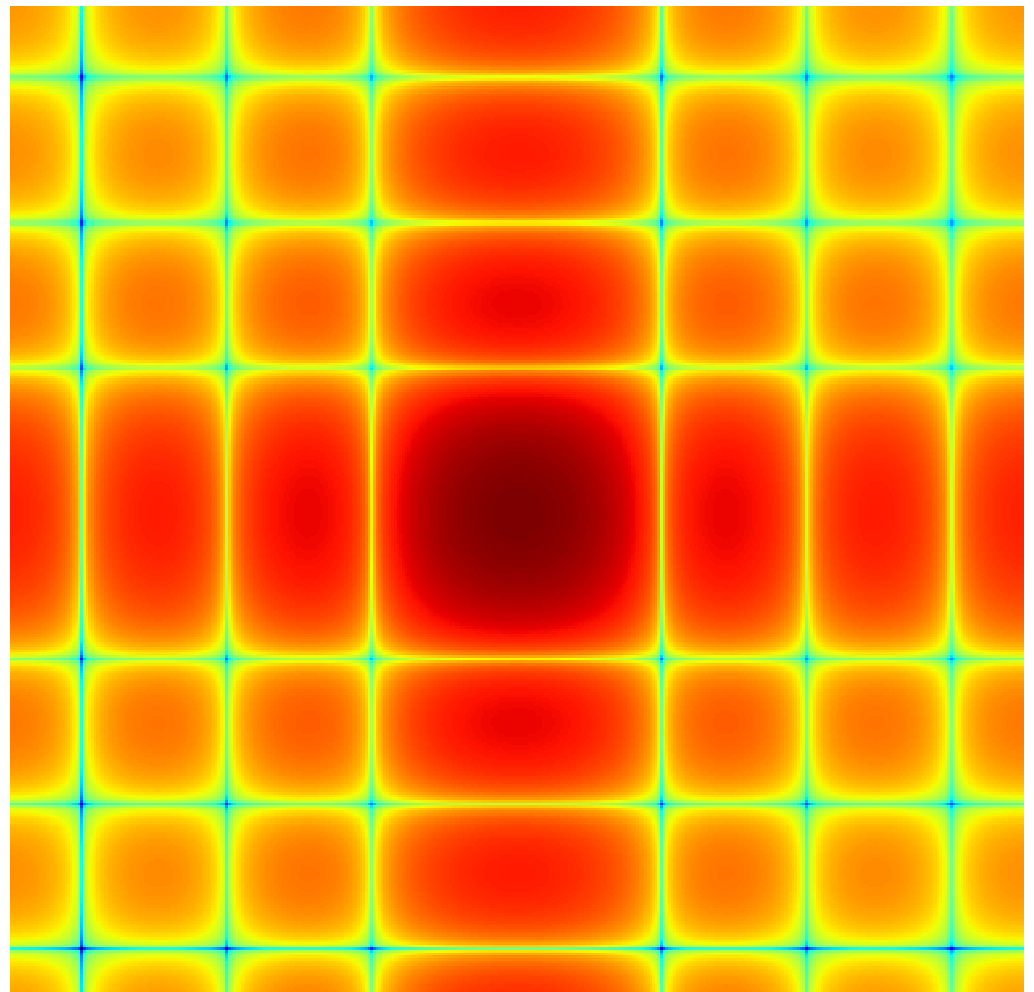


image filtrée

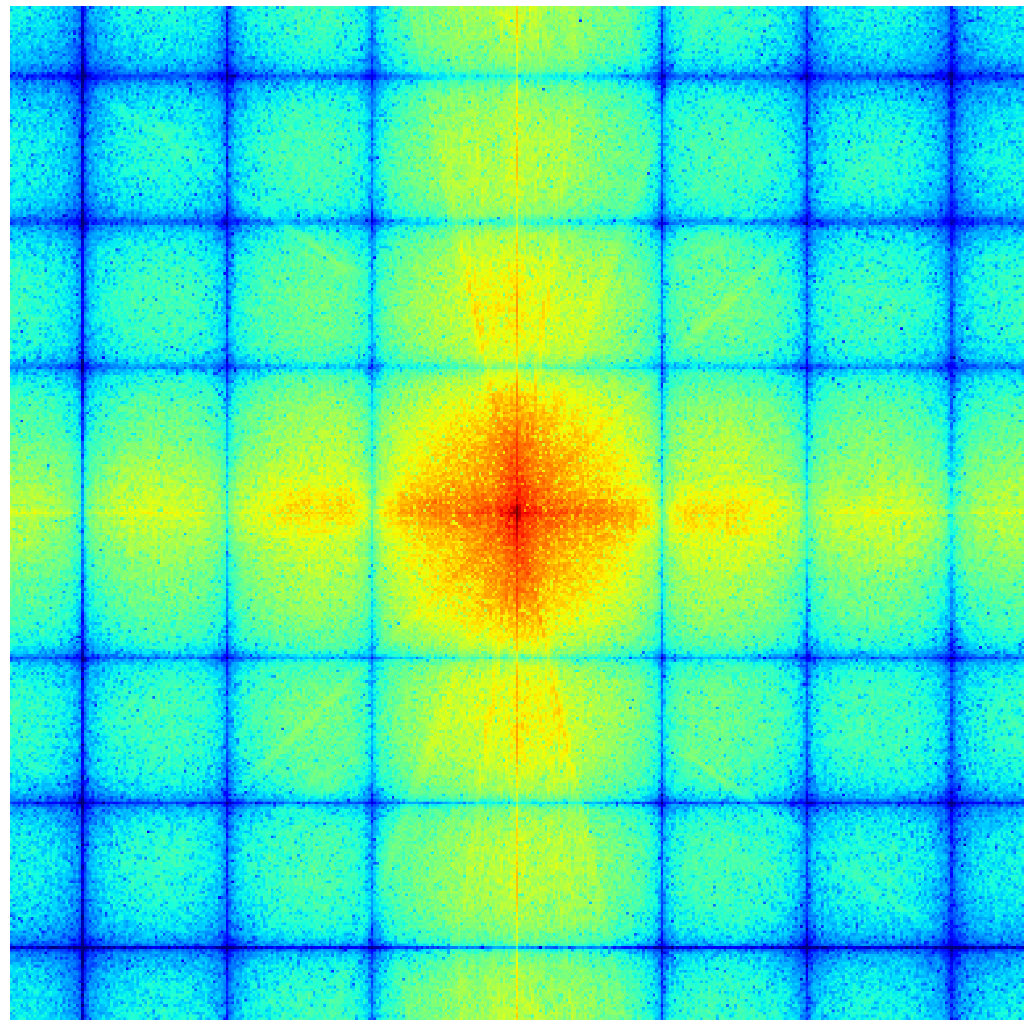
TF de l’image



TF du filtre



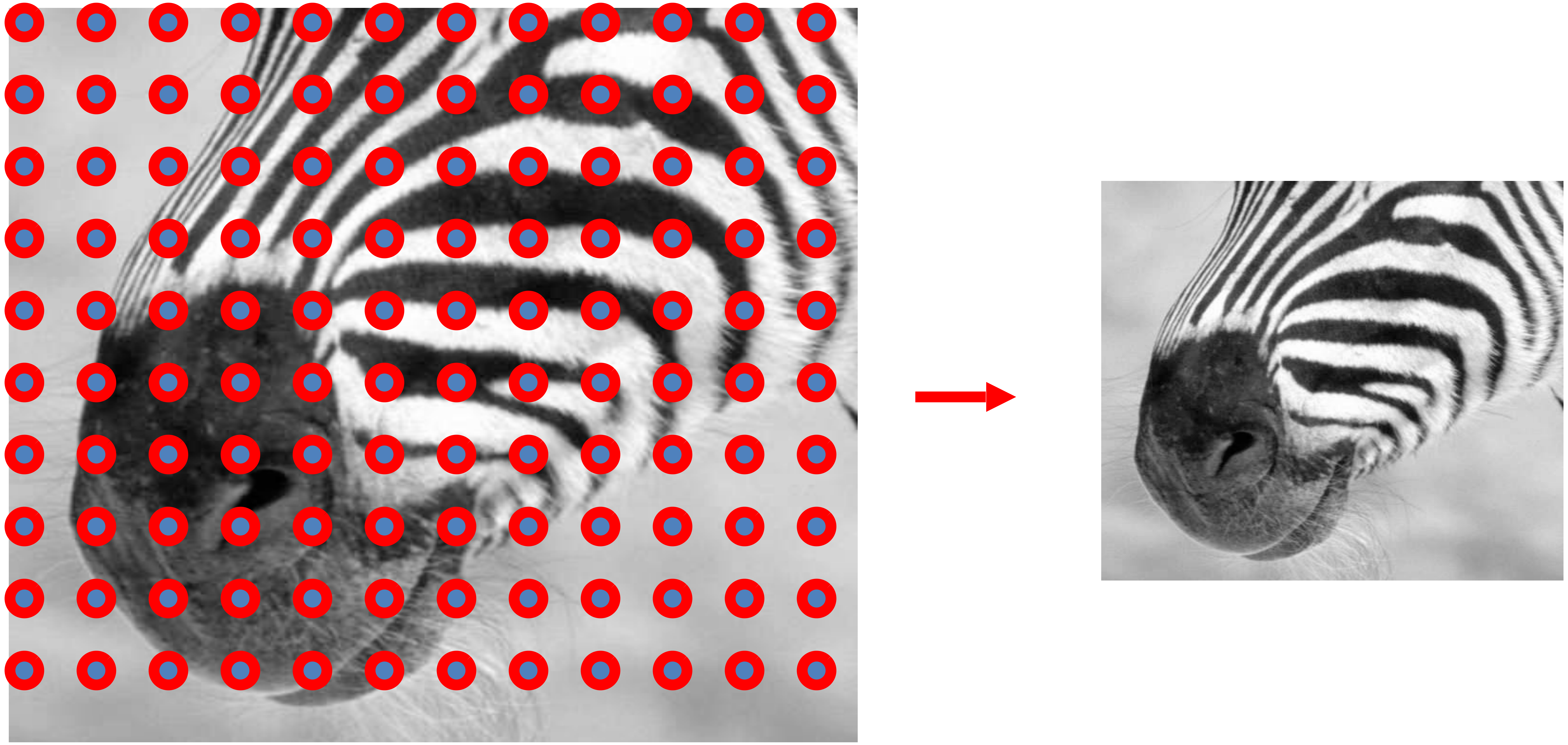
TF de l’image filtrée



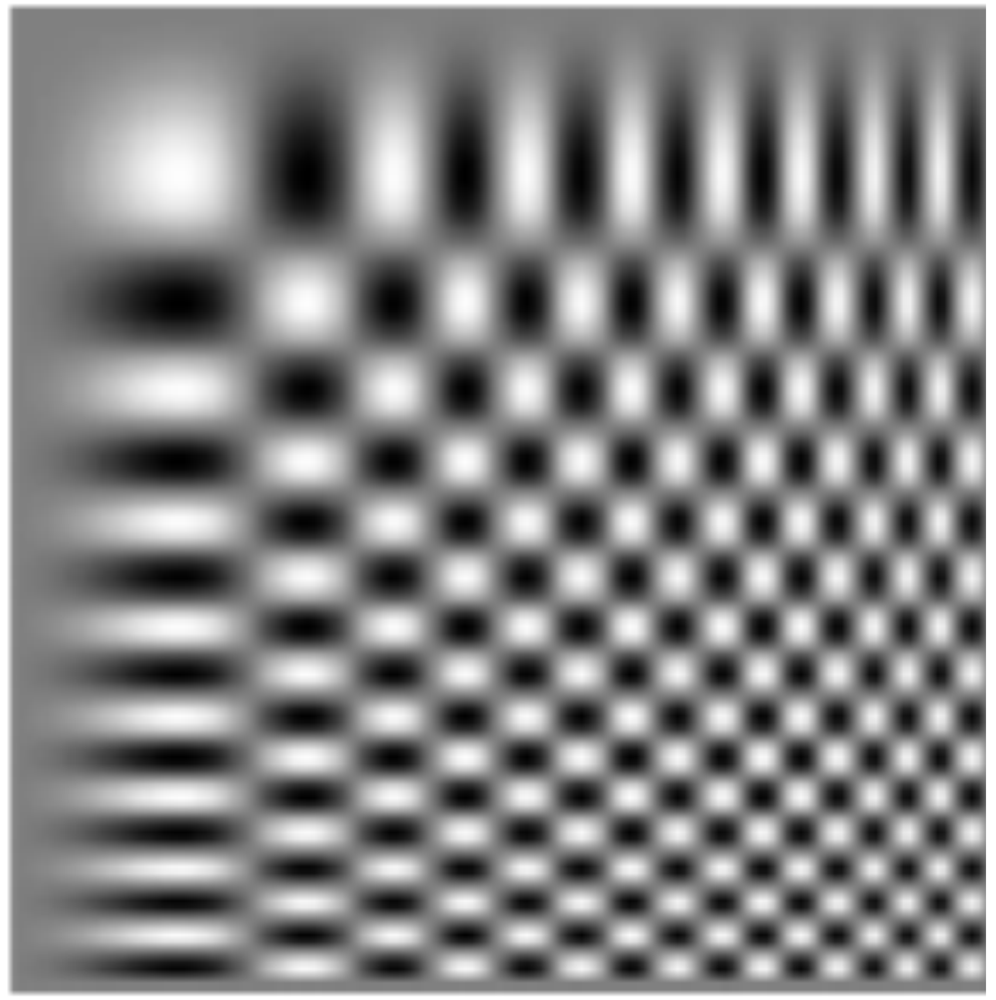
Pourquoi une image à plus faible résolution est toujours compréhensible?
Quelle est l’information perdue?

Image: http://www.flickr.com/photos/igorms/136916757/

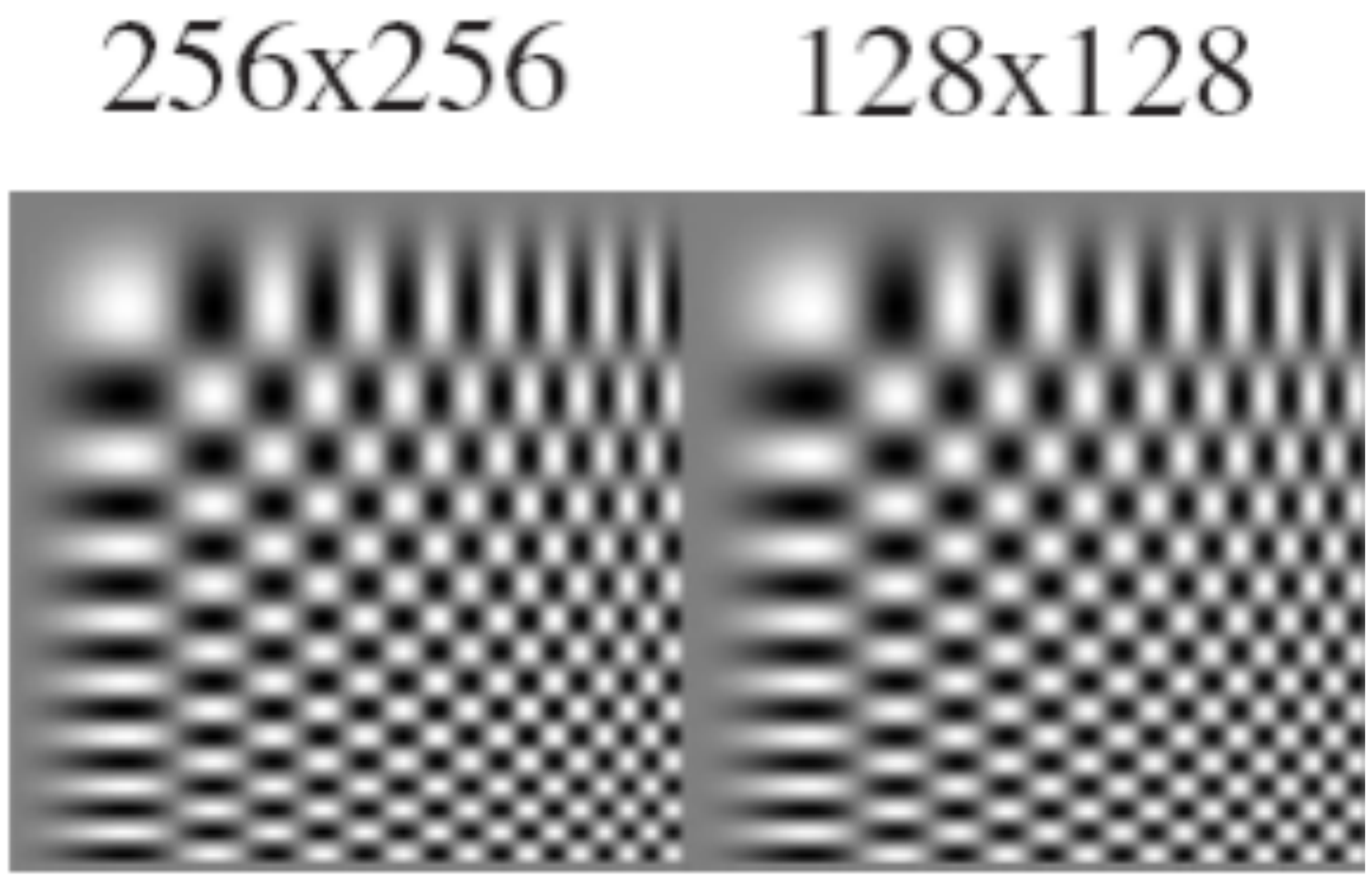
Réduction de taille d'un facteur 2



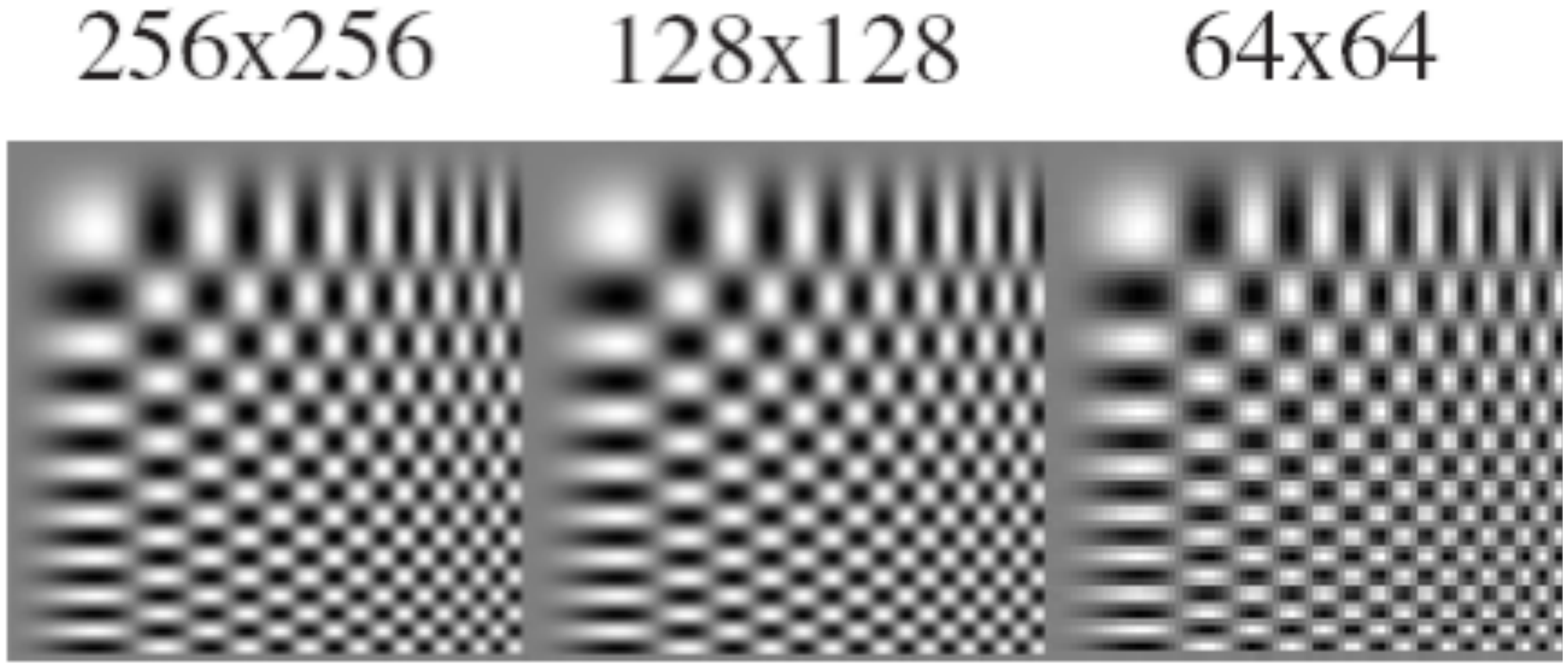
256x256



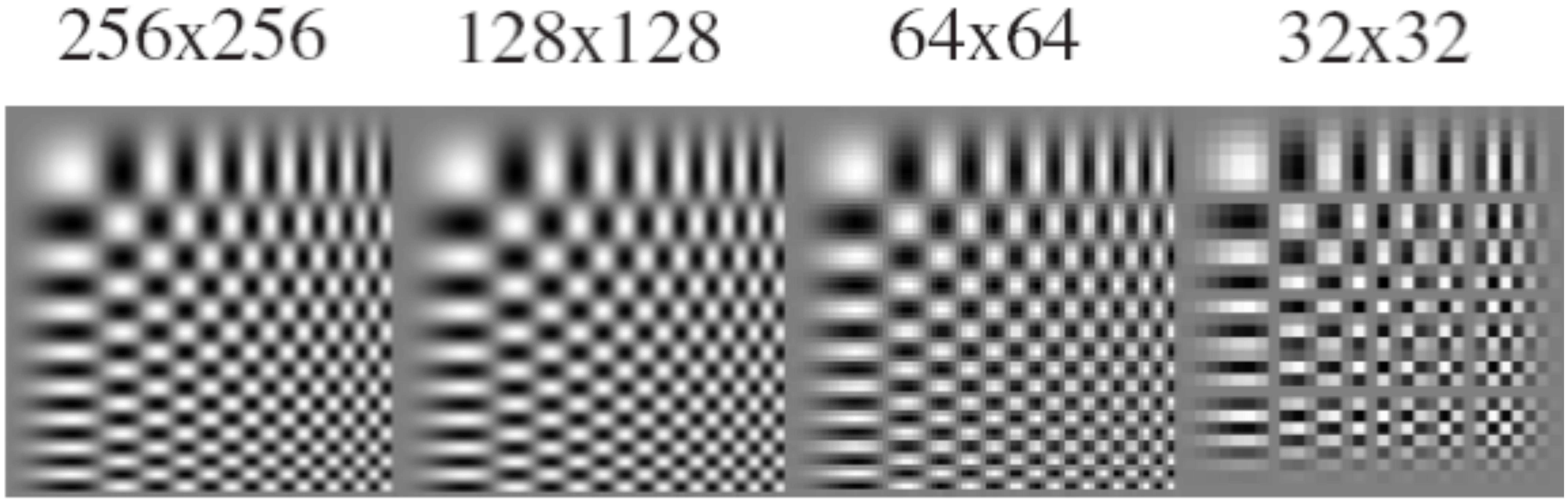
Forsyth and Ponce 2002



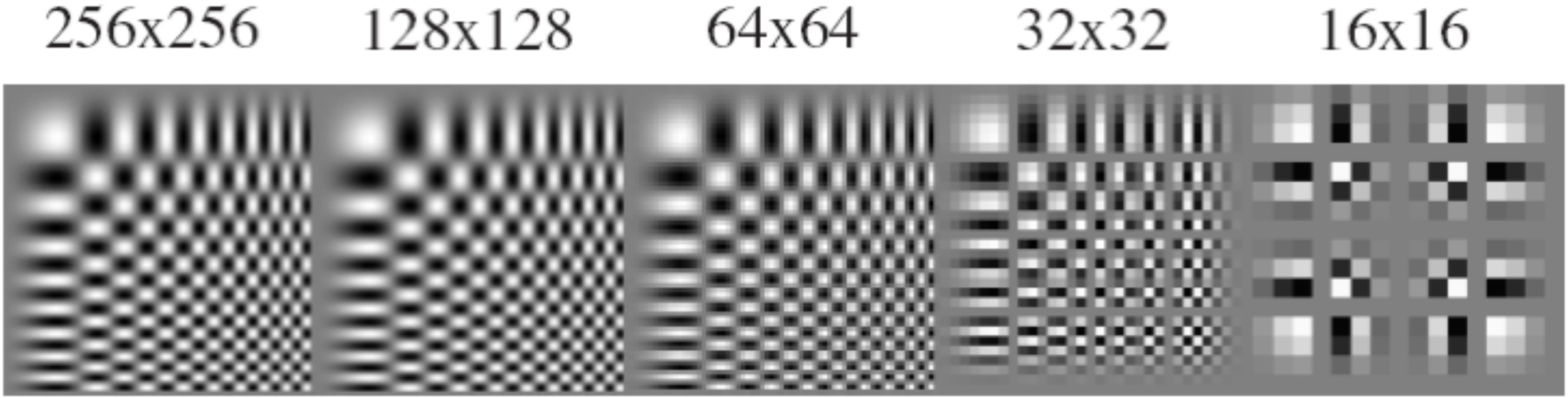
Forsyth and Ponce 2002



Forsyth and Ponce 2002



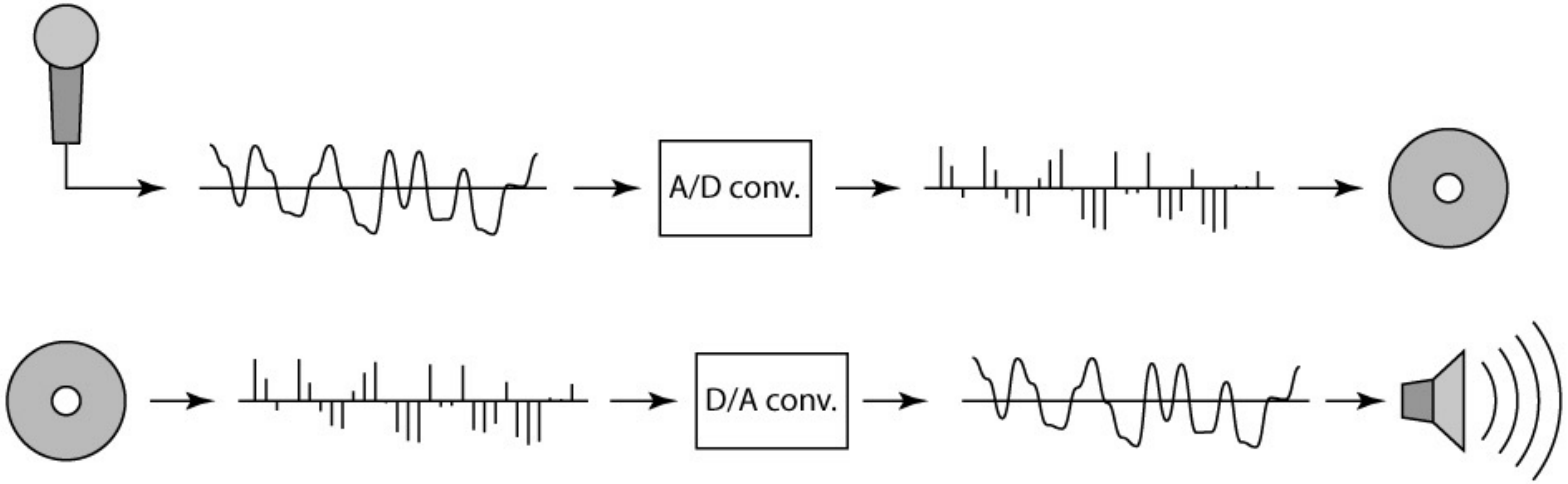
Forsyth and Ponce 2002



Forsyth and Ponce 2002

Exemple : 1D (audio)

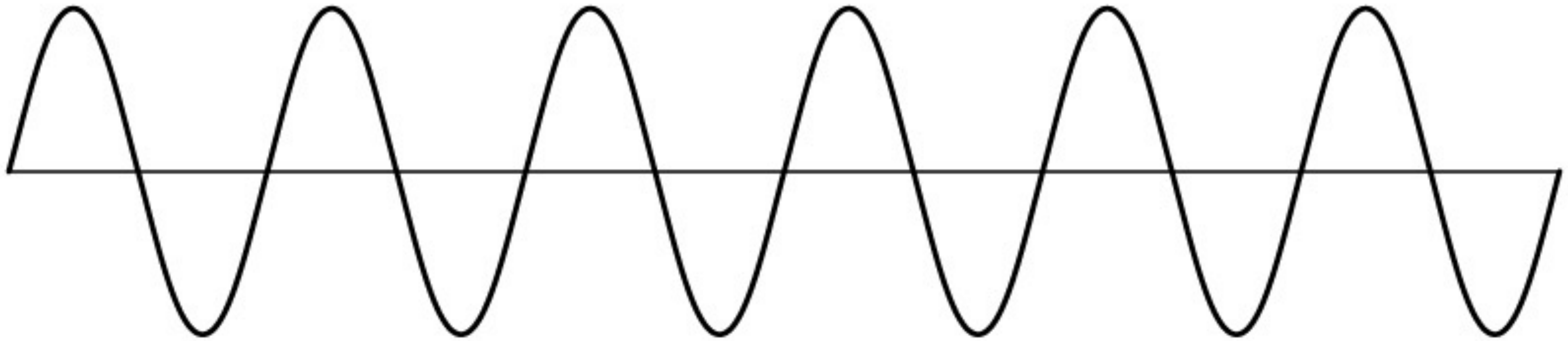
- Enregistrement : son ➙ échantillons numériques
- Écoute : échantillons numériques ➙ son
  - comment s'assurer que l'on peut « remplir les trous » correctement?



Source: S. Marschner

Échantillonnage et reconstruction

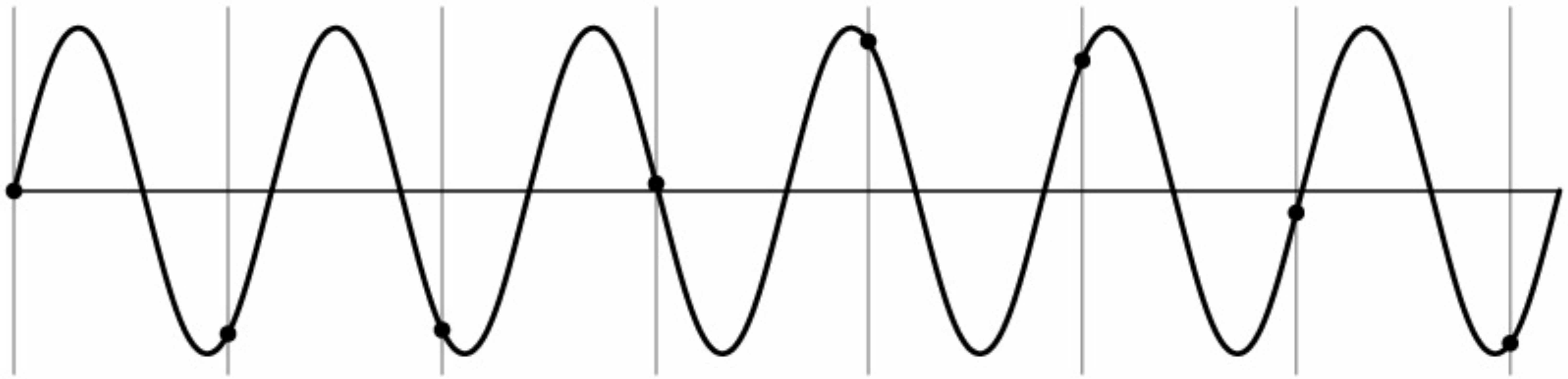
- Signal: sinus en 1-D



Source: S. Marschner

Échantillonnage et reconstruction

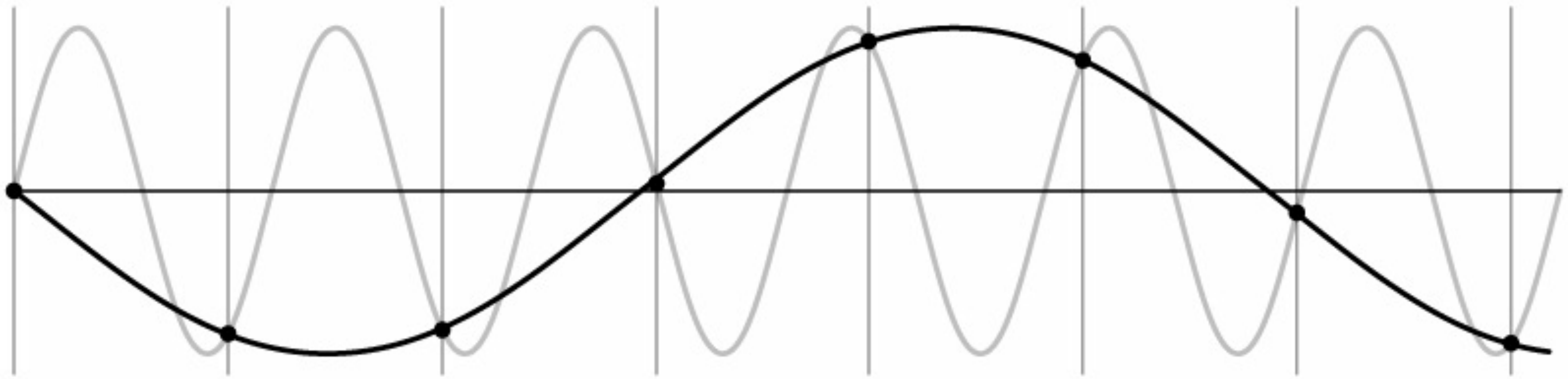
- On échantillonne à une certain fréquence
- Qu'arrive-t-il si on en « manque des bouts »?
  - Pas trop de surprise : on perd de l'information



Source: S. Marschner

Échantillonnage et reconstruction

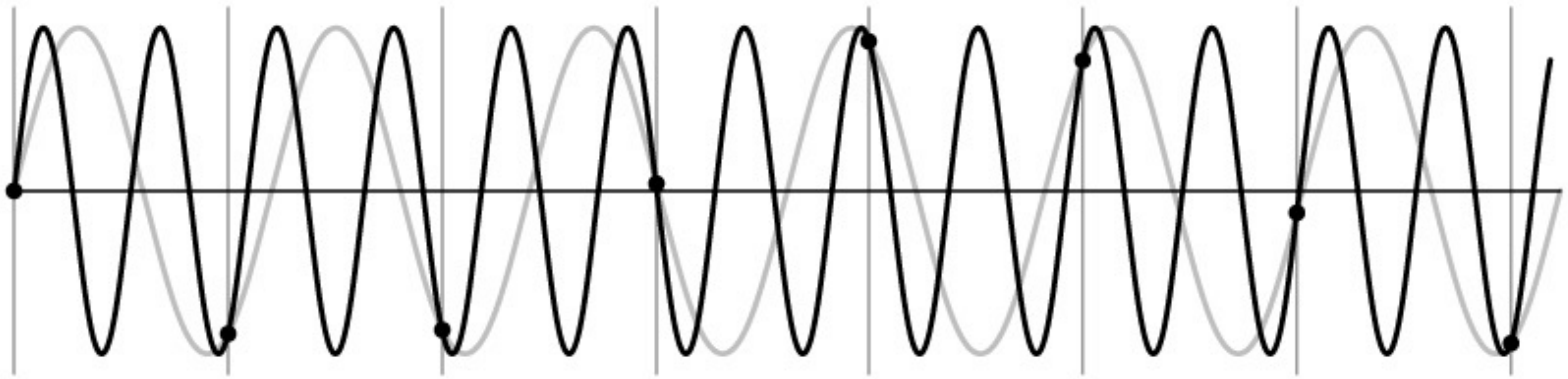
- Surprise: le signal reconstruit est confondu avec un *autre* signal, à fréquence plus faible



Source: S. Marschner

Recouvrement spectral

- Signaux de fréquences différentes « déguisés » dans notre signal original



Source: S. Marschner

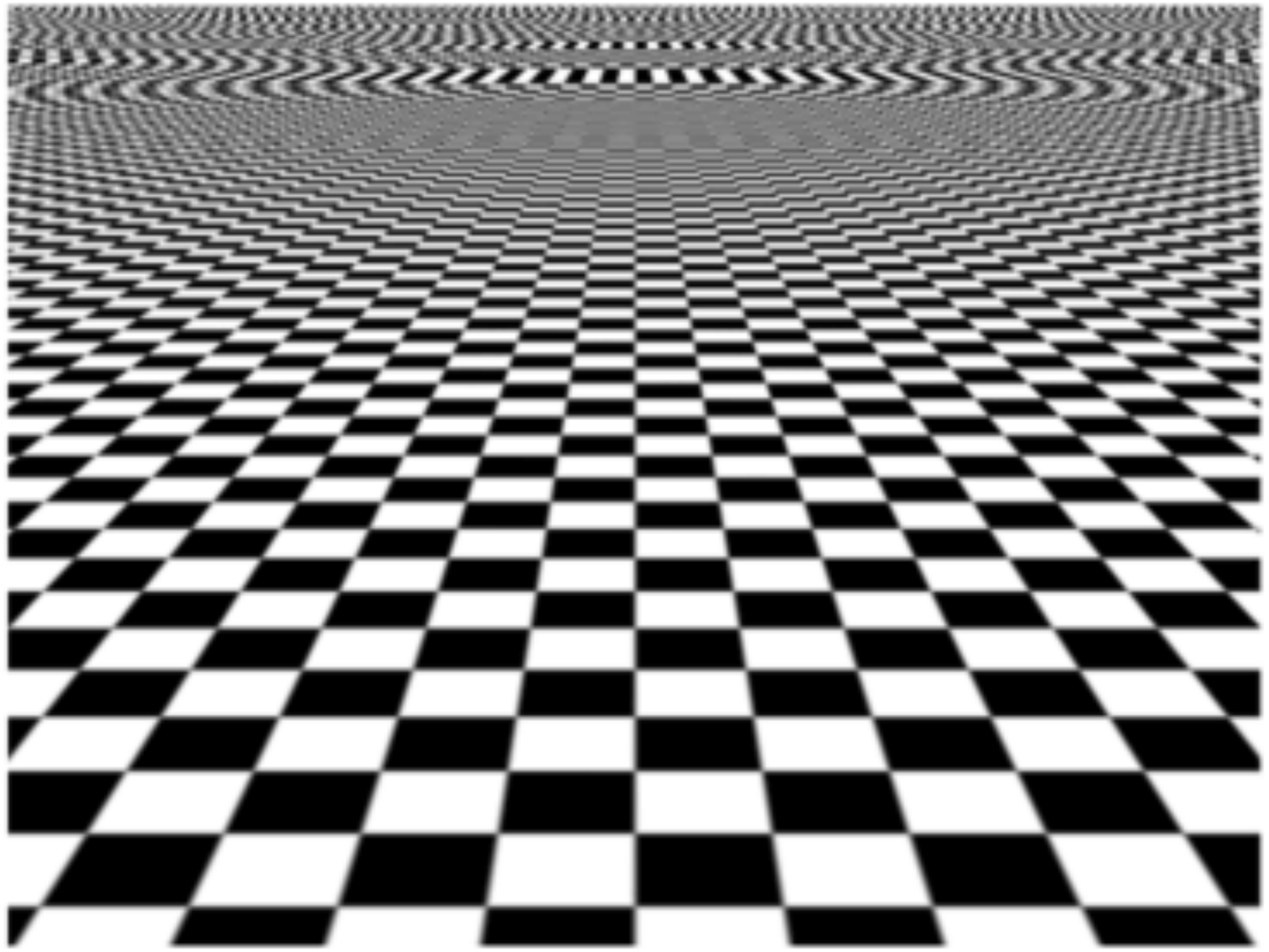
Recouvrement spectral dans les vidéos

https://www.youtube.com/watch?v=B8EMI3_0TO0

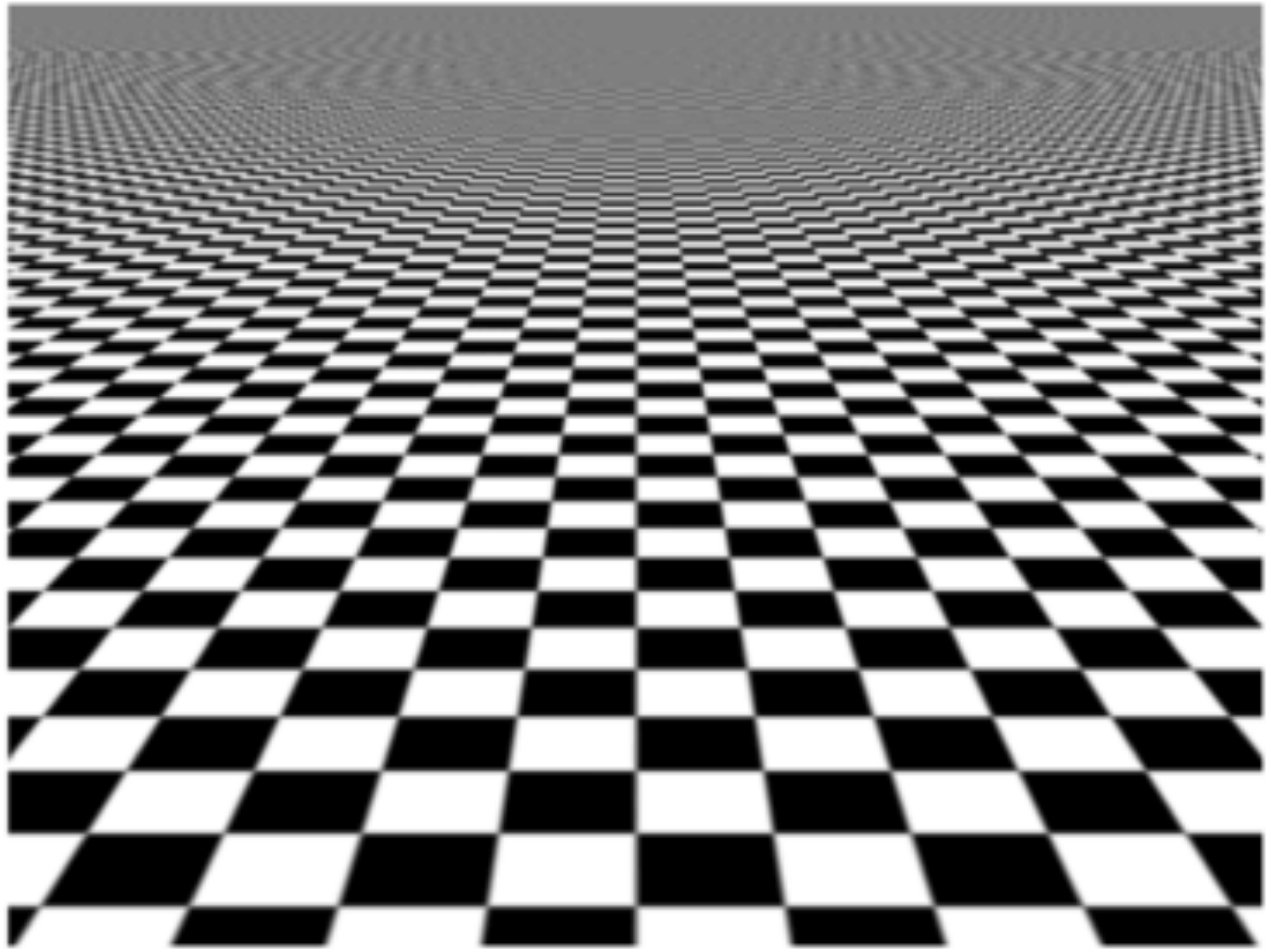
Source: S. Seitz

Recouvrement spectral en infographie

Original



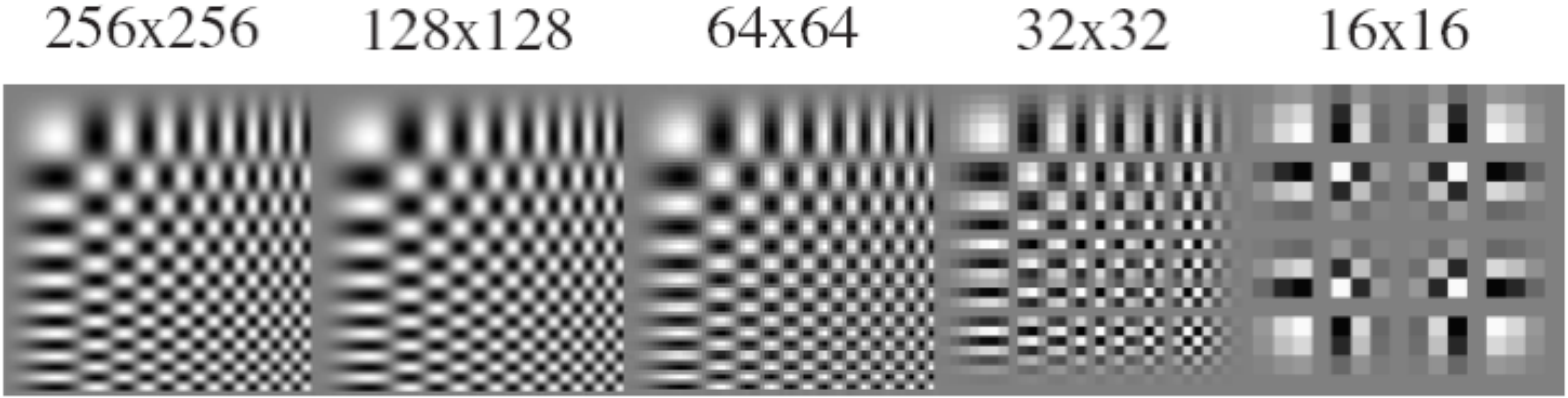
Avec *anti-aliasing*



Source : imgtec

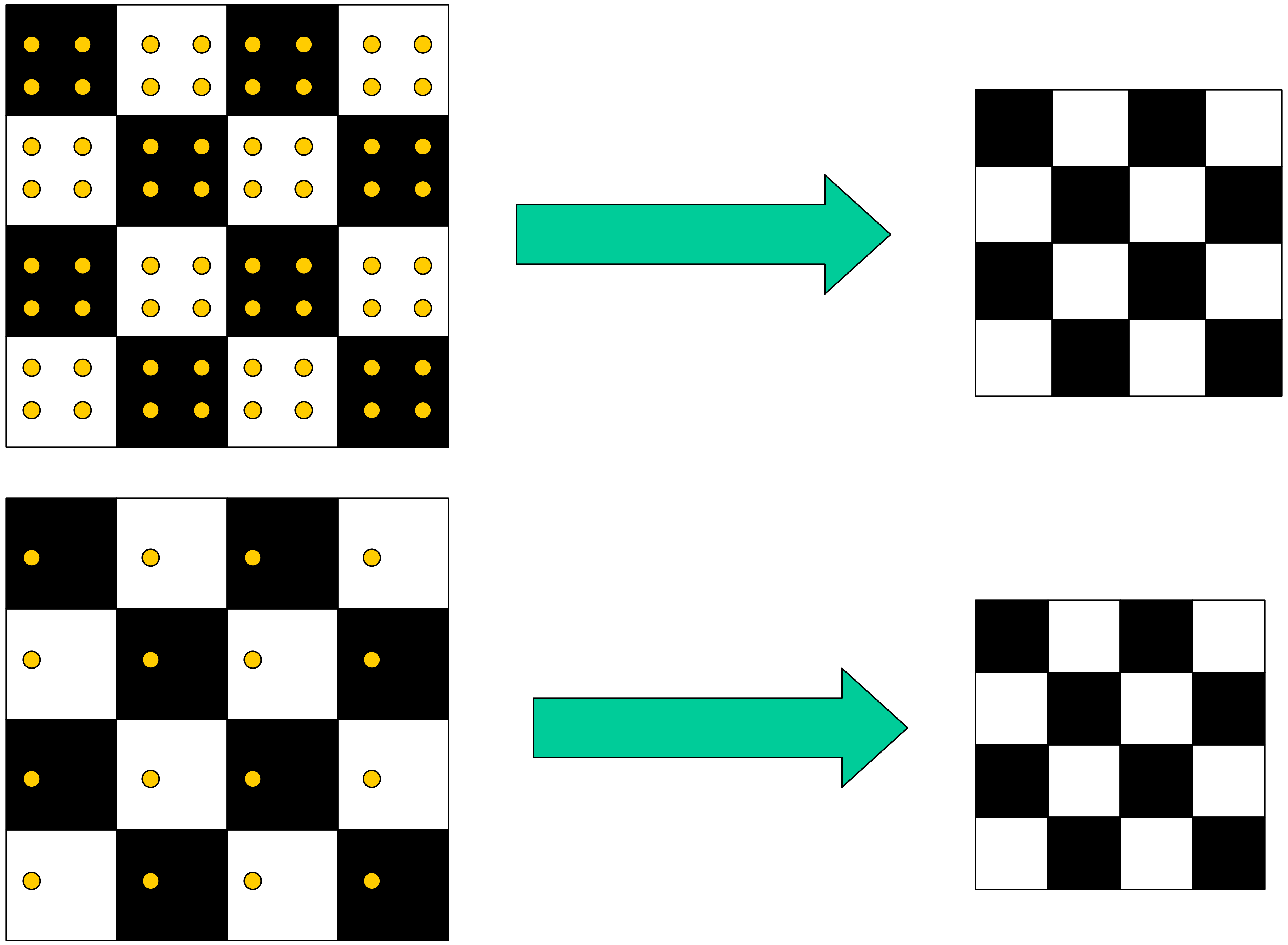
Pourquoi les présentateurs de nouvelles n'ont jamais de chemise rayées?

http://www.youtube.com/watch?v=jXEgnRWRJfg

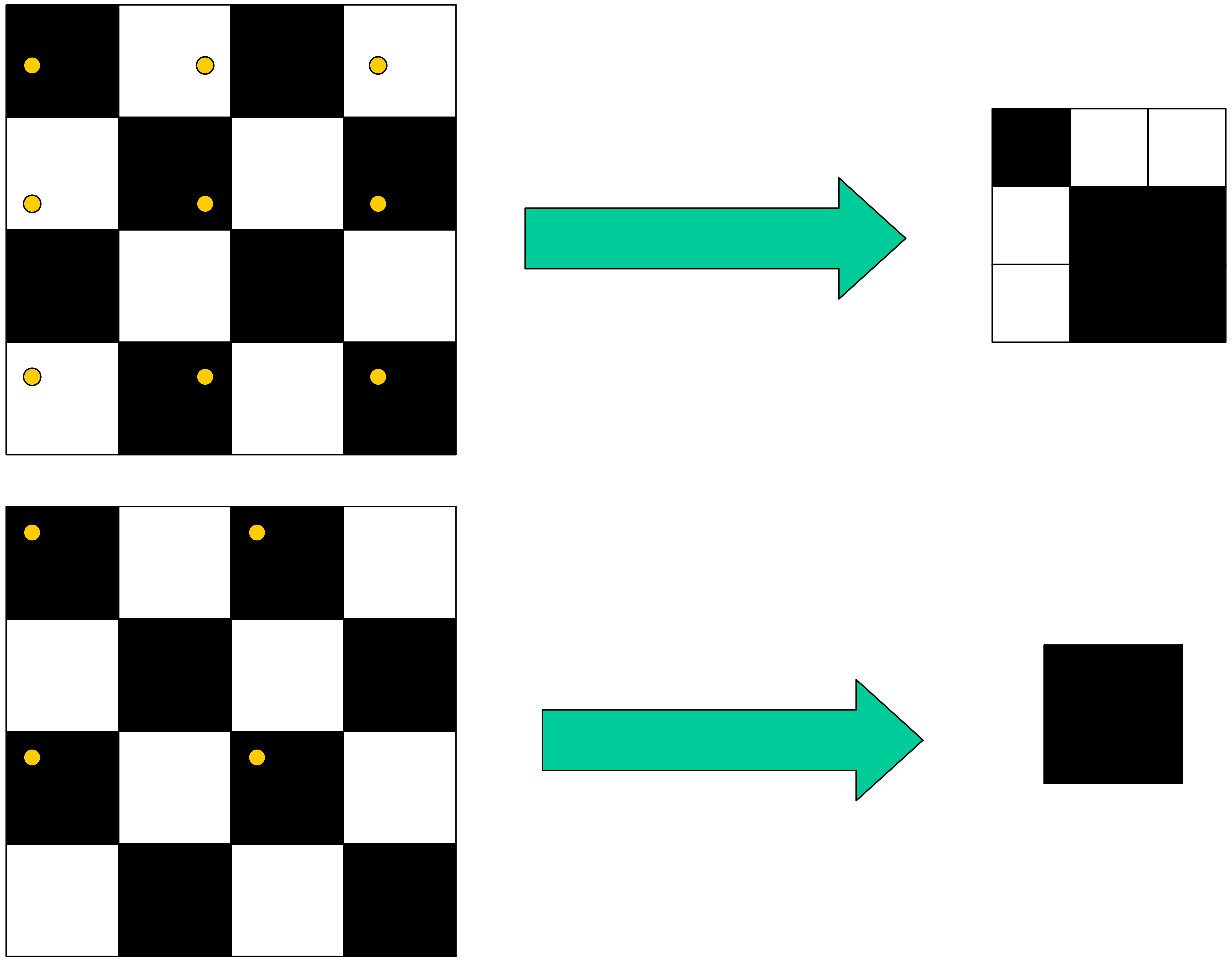


Forsyth and Ponce 2002

Bon échantillonnage



Mauvais échantillonnage = recouvrement!

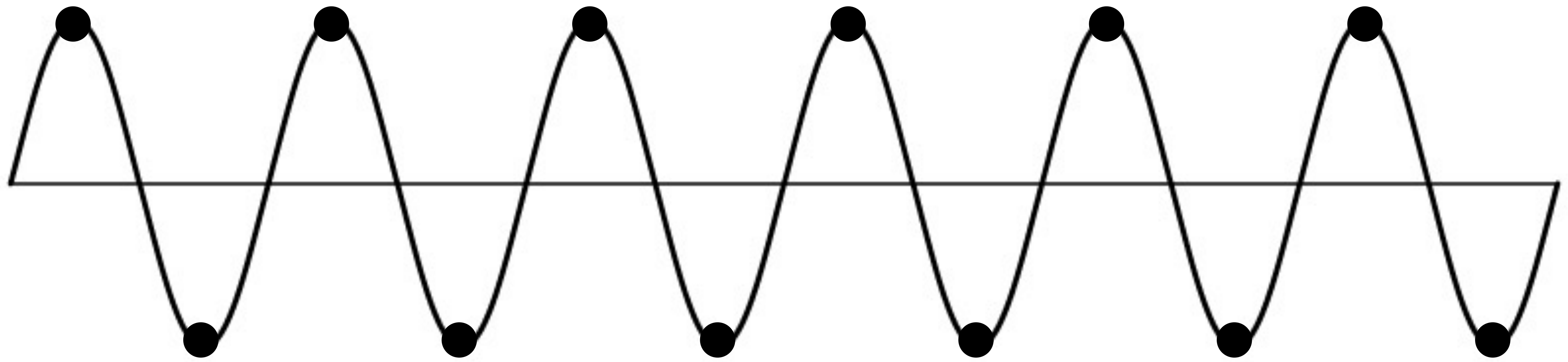


Théorème d’échantillonnage Nyquist-Shannon

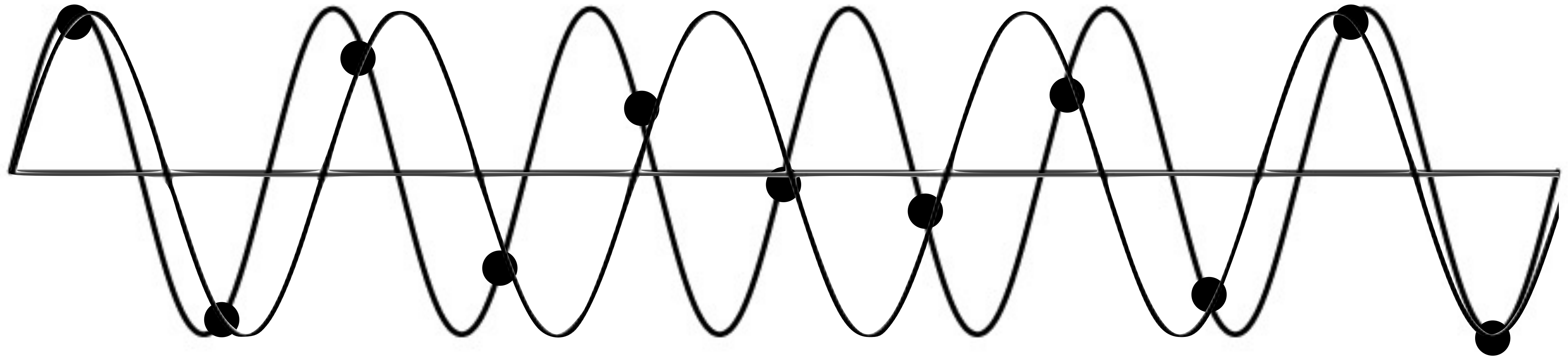
- La fréquence d’échantillonnage d’un signal devrait être ≥ 2 × $f_{\max}$
  - $f_{\max}$ = fréquence maximale du signal

$$f_{\mathrm{e}} \geq 2f_{\mathrm{max}}$$

- Cette condition respectée garantit la reconstruction du signal original



bon!



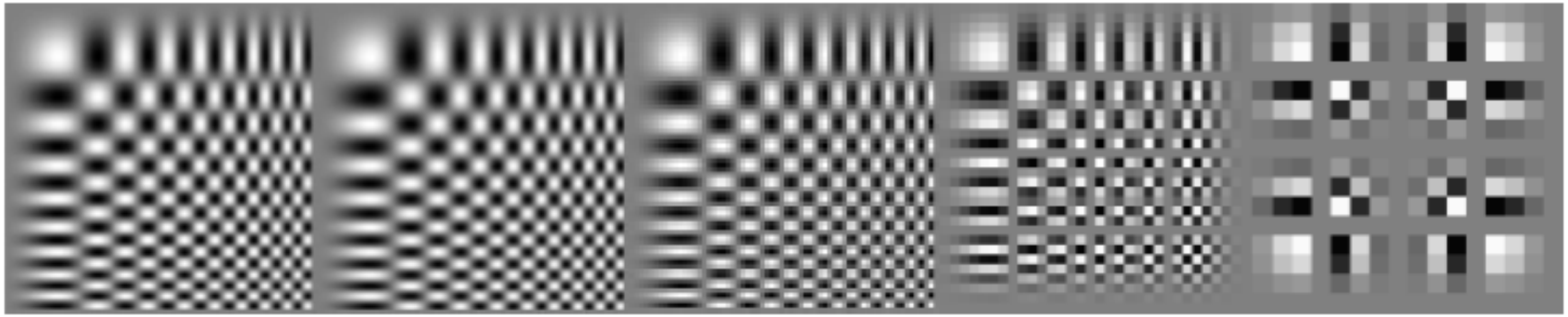
mauvais

Anti-recouvrement (anti-aliasing) $f_\mathrm{e} \geq 2f_\mathrm{max}$

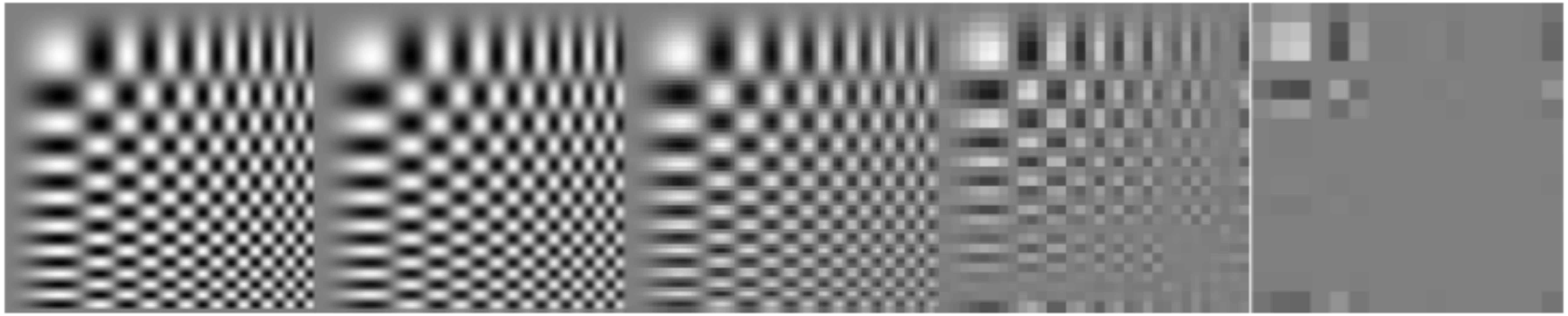
- 2 solutions:
  1. Augmenter la fréquence d’échantillonnage!
  2. Réduire les fréquences qui sont plus grandes que la moitié de la fréquence d’échantillonnage
     - Perte d’information
     - Mieux que le recouvrement spectral!

Recouvrement spectral

256x256 128x128 64x64 32x32 16x16

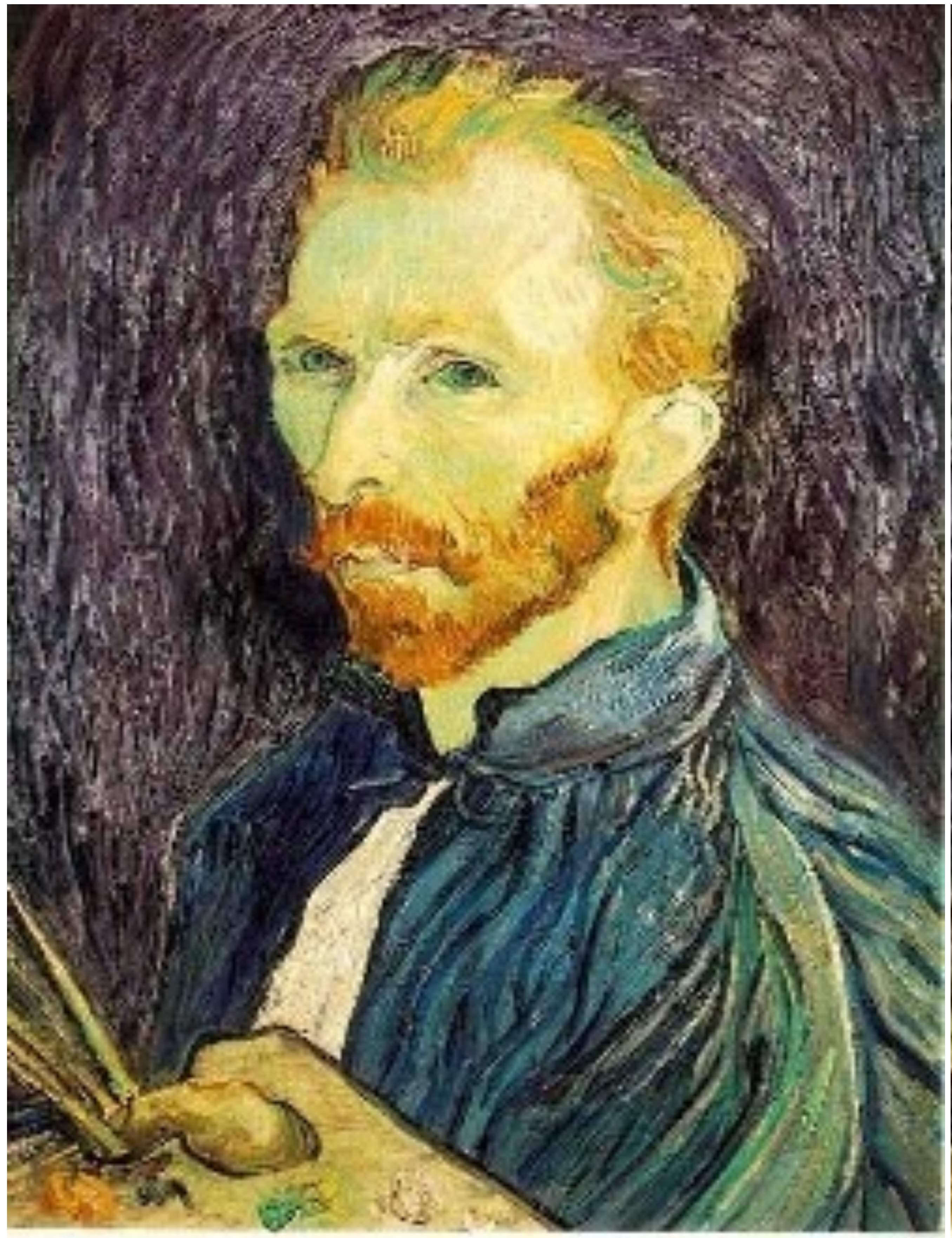


256x256 128x128 64x64 32x32 16x16



Forsyth and Ponce 2002

Échantillonner sans filtrage



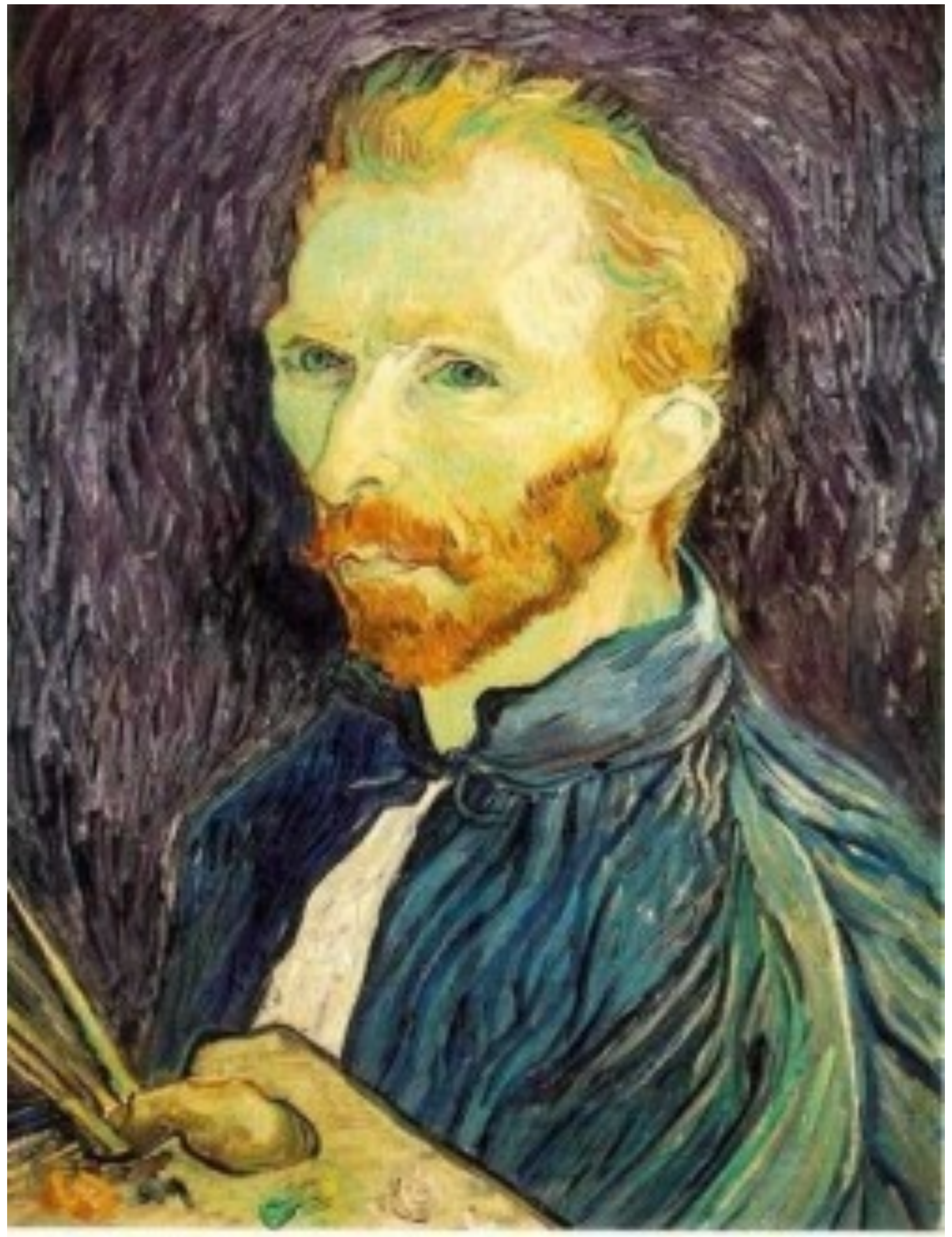
1/2

1/4 (2x zoom)

1/8 (4x zoom)

Credit: Steve Seitz

Échantillonner avec filtrage



Gaussian 1/2

G 1/4

G 1/8

Credit: Steve Seitz

Pourquoi une image à plus faible résolution est toujours compréhensible?
Quelle est l'information perdue?

Image: http://www.flickr.com/photos/igorms/136916757/